Interrogation 1 d'entrainement
Logique et raisonnement

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Enoncer les lois de Morgan.
   1.2 Définir logiquement une implication.
   1.3 Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation d'une implication.

   Manipuler les implications et équivalences. Compléter avec les symboles $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\times$ (lorsqu'aucun des précédents symboles ne fonctionne) les phrases suivantes. Soient $(x,a)\in\mathbb{R}^2$, $(y,b)\in(\mathbb{R}^*)^2$, $z\in\mathbb{C}$, $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle)

1.4	$\cos(x)=0$	.....	$\exists k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.
1.5	$\mathrm{e}^x\geqslant 1$	.....	$x\geqslant 0$.
1.6	$z\in\mathbb{R}$	.....	$\mathrm{Re}\,(z)=z$.
1.7	$x=y$	.....	$\cos(x)=\cos(y)$.
1.8	$\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$	.....	$\begin{cases}a=x\\b=y\end{cases}$.
1.9	$\ln(x)\geqslant 0$	.....	$x>1$.
1.10	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante	.....	$u_{25}>u_{20}$.
1.11	$x\geqslant\frac{\pi}{2}$	.....	$\cos(x)\leqslant 0$.
1.12	$x^2\geqslant 25$	.....	$x\geqslant 5$.
1.13	$\exists A\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=A$	.....	$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists B\in\mathbb{R},\ f(x)>B$.

2. **Réciproque/contraposée/négation.**
   2.1 Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\frac{x-y}{2\pi}\in\mathbb{Z}\quad\Rightarrow\quad\cos(x)=\cos(y).$$

   2.2 Soit $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$[(f\text{ est croissante sur }\mathbb{R})\ \text{ET}\ (f\text{ est majorée sur }\mathbb{R})]\quad\Rightarrow\quad\left[\lim_{x\to+\infty}f(x)\text{ existe dans }\mathbb{R}.\right]$$

   2.3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$). Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ converge}\quad\Rightarrow\quad\exists\,(m,M)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad m\leqslant u_n\leqslant M.$$

   2.4 Soit $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite en $+\infty$ et soit $a\in\mathbb{R}$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>a\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)\geqslant a.$$

   2.5 Soient $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication suivante :

$$\left[\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x<y\ \Rightarrow\ f(x)<f(y))\right]\quad\Rightarrow\quad\left[\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (f(x)=f(y)\ \Rightarrow\ x=y)\right].$$

3. **Quantificateurs.**
   3.1 Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$). Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit monotone puis sa négation.
   3.2 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis sa négation.
   3.3 Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que π soit irrationnel puis sa négation.
   3.4 Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que toutes les fonctions de $\mathscr{E}$ sont positives sur $\mathbb{R}$ puis sa négation.
   3.5 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ecrire avec un ou des quantificateurs le fait que f ne prenne que des valeurs entières puis sa négation.
4. **Récurrence.**
   4.1 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
   4.2 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   4.3 Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
   4.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{5^n-1}{2}$.
   4.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n - (-2)^n$.
   4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2}{n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conjecturer une expression simple de u_n puis le démontrer rigoureusement.
5. **Calcul dans $\mathbb{R}$.**
   5.1 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x^2-1} = x+2$.
   5.2 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+1}$.
   5.3 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+2}$.
   5.4 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{2x^2-x-3} = x+1$.
   5.5 Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x = -1+\sqrt{x^2-2}$.