Réponses de l'interrogation 6
Calcul algébrique

1. (a) Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.
Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$$

(b) Définir le coefficient binomial.
Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=4}^{n+3} \left(\ln\left(3a^k\right) + 3a^k\right)$.

Solution. Conclusion,

$$\boxed{S_n = \ln(a)\,\frac{n\,(n+7)}{2} + n\ln(3) + 3a^4\frac{1-a^n}{1-a}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$ à l'aide d'une inversion d'indice.

Solution. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = n2^{n-1}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{n}{j} i^2 2^j$.

Solution. Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{3^n n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \binom{n}{j}\binom{j}{i}$.

Solution. Conclusion,

$$\boxed{S_n = 3^n - 2^n.}$$