

Exercice Printemps 11

Probabilités & Calcul algébrique

Exercice 1 On dispose de $n + 1$ urnes, avec $n \geq 6$. L'urne U_0 contient 1 jeton 1, 2 jetons 2, ..., n jetons n . Puis pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'urne U_i contient i boules vertes et $n - i$ boules rouges. On pioche un premier jeton dans U_0 , on note N le numéro obtenu puis on pioche successivement et **sans remise** dans l'urne U_N . Au k -ième tirage dans l'urne U_N on note X_k la variable aléatoire retournant 1 si la boule est verte et 0 sinon.

1. On suppose dans cette question que $N = 5$. Calculer la probabilité de piocher dans cet ordre une verte, une rouge, une verte.
2. Déterminer la loi de N .
3. En déduire la loi de X_1 .
4. Montrer que N et X_1 ne sont pas indépendantes.
5. Calculer $\mathbb{P}(N \leq 5 \mid X_1 = 1)$.

Exercice 2 En observant que $k = k + 1 - 1$ calculer $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$.