

Exercice Printemps 09

Applications linéaires & équation complexe

Exercice 1 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$.

1. Montrer que $\text{Im}(f^2) \subseteq \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f^2)$.
2. En déduire que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.
3. Montrer que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont en somme directe.
4. En déduire que $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 2 Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z est telle que les points $M(z)$, $N(1)$ et $P(1+z^2)$ soient alignés. Vérifier que \mathcal{S} l'ensemble solution est l'union de deux ensembles que l'on précisera et dessiner \mathcal{S} .