Interrogation 8 d'entrainement
Equations et géométrie complexes

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Enoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
   1.2 Donner les racines d'un trinôme. On veillera à bien définir toutes les quantités.
   1.3 Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
   1.4 Définir l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Que dire du produit de deux racines n-ième de l'unité ? de l'inverse d'une racine n-ième de l'unité ? de son conjugué ?
   1.5 Caractériser l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
   1.6 Définir j. Que vaut j^2 ? j^3 ? $1+j+j^2$?
   1.7 Caractériser les racines n-ièmes de l'unité par une somme.
   1.8 Enoncer la propriété donnant les racines n-ièmes d'un complexe quelconque.

   Révisions

   1.9 Définir une fonction injective, surjective, bijective.
   1.10 Enoncer le théorème de la bijection (version 2).
   1.11 Enoncer le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque.
   1.12 Définir la négligeabilité entre deux fonctions.
2. **Racines carrées d'un complexe.**
   2.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = 16 - 30i$.
   2.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = 2 + i$.
   2.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.
   2.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = 3 - i$.
   2.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{9}} + \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{9}}$.
3. **Racines n-ièmes d'un complexe.**
   3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^7 + 1 = 0$.
   3.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 4\sqrt{2}\,(-1+i)$.
   3.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^{11} = -5i$.
   3.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(z-i)^7 = (z+i)^7$.
   3.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(z+i)^4 = (z+1)^4$.
4. **Equations complexes du second degré.**
   4.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 5z + 7 + i = 0$.
   4.2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+2i)\,z + i - 1 = 0$.
   4.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4z^2 + 5 = 0$.
   4.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+3i)\,z + 4 + 4i = 0$.
   4.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\,(2+i)\,z + 6 + 8i = 0$.
5. **Applications géométriques.**
   5.1 Soient $A\,(1+i)$, $B\,(4+3i)$ et $C\left(\frac{5}{2}i\right)$. Montrer que ABC est rectangle en A.
   5.2 Soient $A\left(\sqrt{3}-i\right)$, $B\left(2\sqrt{3}\right)$ et $C\left(1+\sqrt{3}-i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)$. Montrer que ABC est rectangle en A.
   5.3 Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Soient $A\,((1+i)\,z)$, $B\,(1+iz)$ et $C\,(z-i)$. Montrer que A, B et C sont alignés.
   5.4 Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-i\}$. Soient $A\,((1+i)\,z)$, $B\,(iz-i)$ et $C\,(z-1)$. Montrer que A, B et C sont alignés.
   5.5 Soit $f : z \mapsto z - 1 + 3i$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   5.6 Soit $f : z \mapsto iz + 1 - i$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   5.7 Soit $f : z \mapsto \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   5.8 Soit $f : z \mapsto \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + i + \sqrt{3}$. A quelle transformation du plan correspond f ?
   5.9 Soit $f : z \mapsto (1+i)\,z$. A quelle transformation du plan correspond f ?