Correction de l'interrogation 3 d'entrainement
Bijections

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U,V)$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

- L'image directe de A par f est
$$f(A) = \{y \in V \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$
- L'image réciproque de B par f est
$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in U \mid f(x) \in B\}.$$

1.2 Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U,V)$.

- On dit que f est injective sur U si et seulement si
$$\forall (x,y) \in U^2, \qquad (f(x) = f(y)) \qquad \Rightarrow \qquad (x = y).$$
- On dit que f est surjective sur V si et seulement si
$$\forall y \in V,\ \exists x \in U, \qquad y = f(x).$$
- On dit que f est bijective sur U dans V si et seulement si
$$\forall y \in V,\ \exists! x \in U, \qquad y = f(x).$$

1.3 Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Si

- f est continue sur I,
- et strictement monotone sur I,

alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus sa réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I, continue et strictement monotone sur J (de même monotonie que f).

1.4 Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. Si

- f est dérivable sur I,
- strictement monotone sur I,
- et $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$,

alors f^{-1} existe, est dérivable sur $J = f(I)$ et
$$\forall x \in J, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

1.5 Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})^2$. On dit que f est négligeable devant g, $f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

2. **Ensemble image, image réciproque, injection, surjection, bijection.**

2.1 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^2+2x+1 \end{cases}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x+2$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) \geqslant 0 \iff 4x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$. On en déduit donc le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

De plus $f(-1) = 2-2+1 = 1$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$ et $f(6) = 2 \times 36 + 12 + 1 = 85$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 \quad \iff \quad 2x^2+2x+1 = 1 \quad \iff \quad 2x\,(x+1) = 0 \quad \iff \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad x = -1.$$

On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	6	$+\infty$
f		1	$\frac{1}{2}$	1	85	

On conclut que

$$f\left([-1\,;6]\right) = \left[\frac{1}{2}\,;85\right] \qquad \text{et} \qquad f^{\leftarrow}\left([-1\,;1]\right) = [-1\,;0]\,.$$

La fonction f n'est ni injective (1 admet deux antécédents -1 et 0) ni surjective (-1 n'a aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

2.2 Soit $f : \begin{cases}]-\infty\,;3[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(3-x)+4 \end{cases}$. La fonction f est bien définie sur $I =]-\infty\,;3[$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{-1}{3-x} = \frac{1}{x-3} < 0.$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur I. De plus $f(-7) = \ln(10)+4$, $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \ln\left(3+\frac{3}{4}\right)+4 = \ln\left(\frac{15}{4}\right)+4$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$. Enfin pour $x \in I$, on a

$$f(x) = 5 \quad \iff \quad \ln(3-x)+4 = 5 \quad \iff \quad \ln(3-x) = 1 \quad \iff \quad 3-x = \mathrm{e} \quad \iff \quad x = 3-\mathrm{e}$$

et

$$f(x) = 11 \quad \iff \quad \ln(3-x)+4 = 11 \quad \iff \quad \ln(3-x) = 7 \quad \iff \quad 3-x = \mathrm{e}^7 \quad \iff \quad x = 3-\mathrm{e}^7\,.$$

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$3-\mathrm{e}^7$	-7	$-\frac{3}{4}$	$3-\mathrm{e}$	3
f	$+\infty$	11	$\ln(10)+4$	$\ln\left(\frac{15}{4}\right)+4$	5	$-\infty$

On conclut que

$$\boxed{f\left(\left[-7\,;-\frac{3}{4}\right]\right) = \left[\ln\left(\frac{15}{4}\right)+4\,;\ln(10)+4\right] \qquad \text{et} \qquad f^{\leftarrow}\left([5\,;11]\right) = \left[3-\mathrm{e}^7\,;3-\mathrm{e}\right].}$$

De plus la fonction est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;3[$. Donc par le théorème de la bijection, f est une bijection de $]-\infty\,;3[$ dans $\left]\lim_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)\,;\lim_{x\to-\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$.

La fonction f est donc bijective et donc surjective et injective.

2.3 Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto 2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$. La fonction cosinus étant strictement décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]$ et de plus $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2$ et $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. On a donc

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$
f	2	$\searrow$	0

Ainsi,

$$\boxed{f\left(\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]\right)=[0\,;\,2]\,.}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
x\in f^{\leftarrow}([-1\,;\,0]) &\Leftrightarrow f(x)\in[-1\,;\,0]\\
&\Leftrightarrow -1\leqslant 2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqslant \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow \begin{array}{l} \exists k\in\mathbb{Z}, -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant -\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \text{OU}\\ \exists k\in\mathbb{Z}, \frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant \frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\\
&\Leftrightarrow \begin{array}{l} \exists k\in\mathbb{Z}, -\frac{5\pi}{12}+2k\pi\leqslant x\leqslant -\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \text{OU}\\ \exists k\in\mathbb{Z}, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant \frac{11\pi}{12}+2k\pi\end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f^{\leftarrow}([-1\,;\,0])=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[-\frac{5\pi}{12}+2k\pi\,;\,-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi\,;\,\frac{11\pi}{12}+2k\pi\right]\right).$$

Enfin, la fonction f n'est pas injective (car 2π-périodique $f(0)=f(2\pi)$) ni surjective (3 n'a pas d'antécédent car pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\leqslant 2$) et donc a fortiori, f n'est pas bijective.

2.4 Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto 4-7x^2+21x\end{cases}$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-14x+21$. Donc pour $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -14x+21\geqslant 0 \Leftrightarrow 21\geqslant 14x \Leftrightarrow x\leqslant\frac{3}{2}$. Donc

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$	

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, $f(-2)=4-28-42=-66$, $f(2)=4-28+42=18$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=4-\frac{63}{4}+\frac{63}{2}=4+\frac{63}{4}=\frac{79}{4}$. Enfin pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x)=18 \Leftrightarrow 4-7x^2+21x=18 &\Leftrightarrow 7x^2-21x+14=0\\
&\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\\
&\Leftrightarrow (x-2)(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow x=2 \quad \text{OU} \quad x=1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

x	$-\infty$	-2	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f	$-\infty$	-66	18	$\frac{79}{4}$	18	$-\infty$

Ainsi,

$$f([-2\,;\,2]) = \left[-66\,;\,\frac{79}{4}\right] \qquad \text{et} \qquad f^{\leftarrow}(]-\infty\,;\,18]) =]-\infty\,;\,1] \cup [2\,;\,+\infty[$$

De plus, f n'est pas injective (18 admet deux antécédents) ni surjective ($20 = \frac{80}{4} > \frac{79}{4}$ n'admet aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

2.5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^{5x+2} - 2 \end{cases}$. Les fonctions $x \mapsto 5x+2$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x-2$ étant strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, donc par la stricte croissance de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > -2$. Donc $f^{\leftarrow}([-7\,;\,-2]) = \emptyset$. De plus $f(0) = \mathrm{e}^2 - 2$, $f(8) = \mathrm{e}^{42} - 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
f	-2	$\mathrm{e}^2 - 2$	$\mathrm{e}^{42} - 2$	$+\infty$

Conclusion,

$$f([0\,;\,8]) = \left[\mathrm{e}^2 - 2\,;\,\mathrm{e}^{42} - 2\right] \qquad \text{et} \qquad f^{\leftarrow}([-7\,;\,-2]) = \emptyset.$$

La fonction f est injective sur $\mathbb{R}$ (par sa stricte croissance et le théorème de la bijection, elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-2\,;\,+\infty[$) mais n'est pas surjective (-3 n'admet aucun antécédent) ni a fortiori bijective.

3. **Fonction réciproque/Dérivée de la réciproque.**

3.1 Soit $f : x \mapsto \left(\sqrt{2x-4}+1\right)\mathrm{e}^x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$2x - 4 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant 2.$$

La fonction f est donc bien définie et même continue sur $[2;+\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont. De même, pour $x \geqslant 2$, $2x-4 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 2$. La fonction f est donc dérivable sur $]2;+\infty[$ et

$$\forall x \in]2;+\infty[, \qquad f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-4}}\mathrm{e}^x + \left(\sqrt{2x-4}+1\right)\mathrm{e}^x = \left(\frac{1}{\sqrt{2x-4}} + \sqrt{2x-4} + 1\right)\mathrm{e}^x.$$

Or pour tout $x > 2$, $\mathrm{e}^x > 0$, $\sqrt{2x-4} > 0$, $\frac{1}{\sqrt{2x-4}} > 0$. Donc

$$\forall x > 2, \qquad f'(x) > 0.$$

Ainsi f est strictement croissante sur $]2;+\infty[$. Puisque f est continue en 2, on en déduit que f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$. Enfin, $f(2) = \left(\sqrt{4-4}+1\right)\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2$ et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x-4}+1\right)\mathrm{e}^x = +\infty.$$

On a donc

- f est continue sur $[2;+\infty[$,
- f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définie une bijection de } [2;+\infty[\text{ dans } J = \left[f(2); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left[\mathrm{e}^2;+\infty\right[.}$$

Posons $J' = J \setminus \left\{\mathrm{e}^2\right\} = \left]\mathrm{e}^2;+\infty\right[$. Par ce qui précède,

- f est dérivable sur $I' =]2;+\infty[$,
- f est strictement croissante sur I',
- $\forall x \in I'$, $f'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J' = \left]\mathrm{e}^2;+\infty\right[$ et

$$\forall y \in J', \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2f^{-1}(y)-4}} + \sqrt{2f^{-1}(y)-4}+1\right)\mathrm{e}^{f^{-1}(y)}}.$$

Conclusion, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } \left]\mathrm{e}^2;+\infty\right[}$ et

$$\boxed{\forall y \in \left]\mathrm{e}^2;+\infty\right[, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2f^{-1}(y)-4}} + \sqrt{2f^{-1}(y)-4}+1\right)\mathrm{e}^{f^{-1}(y)}}.}$$

3.2 Soit $f : x \mapsto x^3\left(3\ln(x)-1\right)$. La fonction f est définie, continue et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence et produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = 3x^2\left(3\ln(x)-1\right) + x^3\left(\frac{3}{x}\right) = x^2\left(9\ln(x)-3+3\right) = 9x^2\ln(x).$$

Or pour tout $x \in]0;1[$, $\ln(x) < 0$ et $9x^2 > 0$. Donc

$$\forall x \in]0;1[, \qquad f'(x) < 0.$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $]0;1[$. Puisque f est continue en 1, on en déduit que f est strictement décroissante sur $]0;1]$. Enfin, $f(1) = -1$ et

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^3\left(3\ln(x)-1\right) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} 3x^3\ln(x) - x^3 = 0 \qquad \text{par croissance comparée.}$$

On a donc

- f est continue sur $]0;1]$,
- f est strictement décroissante sur $]0;1]$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définie une bijection de }]0;1] \text{ dans } J = \left[f(1); \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)\right[= [-1;0[.}$$

Posons $J' = J \setminus \{-1\} =]-1;0[$. Par ce qui précède,

- f est dérivable sur $I' =]0;1[$,
- f est strictement décroissante sur I',
- $\forall x \in I'$, $f'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J' =]-1;0[$ et

$$\forall y \in J', \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{9f^{-1}(y)^2\ln\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Conclusion, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]-1;0[}$ et

$$\boxed{\forall y \in]-1;0[, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{9f^{-1}(y)^2\ln\left(f^{-1}(y)\right)}.}$$

3.3 Soit $f : x \mapsto \ln(\tan(x))$. La fonction tangente est bien définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) > 0$. Donc la fonction f est bien définie sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus f est continue et même dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions qui sont continues et dérivables sur leurs domaines de définition. Puis,

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad f'(x) = \frac{1 + \tan^2(x)}{\tan(x)}.$$

Pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) > 0$. Donc

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad f'(x) > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ *(on pouvait aussi le voir directement comme composée de deux fonctions strictement croissantes)*. Enfin,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(\tan(x)) = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \ln(u) = -\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \ln(\tan(x)) = \lim_{u \to +\infty} \ln(u) = +\infty.$$

On a donc

- f est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
- f est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définie une bijection de } \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ dans } J = \left]\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x); \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x)\right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}.}$$

Directement, par ce qui précède,

- f est dérivable sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
- f est strictement croissante sur I,
- $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

Donc par le théorème de la dérivée de la réciproque, f^{-1} est dérivable sur $J = \mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1 + \tan^2\left(f^{-1}(y)\right)}{\tan\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Conclusion, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1 + \tan^2\left(f^{-1}(y)\right)}{\tan\left(f^{-1}(y)\right)}.}$$

3.4 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Soit $x \in [0; 1[$. Alors, $x^2 < 1$ donc $1 - x^2 > 0$. Donc la fonction f est bien définie et même dérivable sur $[0; 1[$. De plus,

$$\forall x \in [0; 1[, \qquad f'(x) = \left(\left(1 - x^2\right)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times \left(1 - x^2\right)^{-3/2} = \frac{x}{\left(1 - x^2\right)^{3/2}}.$$

Pour tout $x \in]0; 1[$, $1 - x^2 > 0$ et $x > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; 1[$. Puis par continuité de f en 0, on trouve que f est strictement croissante sur $[0; 1[$. Enfin, $f(0) = 1$ et

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{1}{\sqrt{u}} = +\infty.$$

On a donc

- f est continue sur $[0; 1[$,

- f est strictement croissante sur $[0;1[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } [0;1[\text{ dans } J = \left[f(0); \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)\right[= [1;+\infty[.}$$

Soient $x \in [0;1[$ et $y \in [1;+\infty[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = y \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-x^2} = y^2 \qquad \text{car } 1-x^2>0 \text{ et } y \geqslant 1 > 0 \leftarrow \textbf{important} \\
&\Leftrightarrow \quad 1-x^2 = \frac{1}{y^2} \qquad \text{car } 1-x^2 \neq 0 \text{ et } y^2 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2-1}{y^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}} \qquad \text{car } x \geqslant 0 \text{ et } y^2-1 \geqslant 0 \text{ car } y \geqslant 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} \qquad \text{car } y \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in [1;+\infty[, \qquad f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}.}$$

3.5 Soit $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x+5}$. Pour tout $x \geqslant -1$, $x > -\frac{5}{2}$ donc $2x+5 \neq 0$. Donc f est bien définie et même continue et dérivable sur $[-1;+\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \geqslant -1, \qquad f'(x) = \frac{2x+5-2(x+3)}{(2x+5)^2} = -\frac{1}{(2x+5)^2}.$$

Donc pour tout $x > -1$, $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$. Enfin, $f(-1) = \frac{2}{3}$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{2+\frac{5}{x}} = \frac{1}{2}.$$

On a donc

- f est continue sur $[-1;+\infty[$,
- f est strictement décroissante sur $[-1;+\infty[$.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } [-1;+\infty[\text{ dans } J = \left[\lim_{x\to+\infty} f(x); f(-1)\right[= \left]\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right].}$$

Soient $x \in [-1;+\infty[$ et $y \in \left]\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+3}{2x+5} = y \\
&\Leftrightarrow \quad x+3 = y(2x+5) \qquad \text{car } 2x+5 \neq 0 \leftarrow \textbf{important pour la réciproque} \\
&\Leftrightarrow \quad x(2y-1) = 3-5y \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{3-5y}{2y-1} \qquad \text{car } y \neq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in [-1;+\infty[, \qquad f^{-1}(y) = \frac{3-5y}{2y-1}.}$$

3.6 Soit $f : x \mapsto e^{2x} - 2e^x$. La fonction f est définie, continue et même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions qui le sont donc notamment sur $I = [\ln(2); +\infty[$. De plus,

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1).$$

Pour tout $x \geqslant \ln(2)$, $e^x \geqslant 2$. Donc $e^x - 1 \geqslant 1 > 0$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur I. Enfin, $f(\ln(2)) = e^{2\ln(2)} - 2e^{\ln(2)} = e^{\ln(4)} - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - 2e^x = \lim_{x\to+\infty} e^x(e^x - 2) = +\infty.$$

On a donc

- f est continue sur $I = [\ln(2); +\infty[$,
- f est strictement croissante sur I.

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } [\ln(2); +\infty[\text{ dans } J = \left[f(\ln(2)); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0; +\infty[= \mathbb{R}_+.}$$

Soient $x \in [\ln(2); +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}_+$. On a l'équivalence suivante :

$$y = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{2x} - 2e^x = y.$$

Posons $X = e^x$. Dès lors,

$$y = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2 - 2X = y \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2 - 2X - y = 0.$$

Posons Δ le discriminant associé, on a $\Delta = 4 + 4y = 4(y+1)$. Puisque $y \geqslant 0$, $y + 1 > 0$ et donc $\Delta > 0$. Le polynôme admet donc deux racines $\frac{2-\sqrt{4(y+1)}}{2} = 1 - \sqrt{1+y}$ et $1 + \sqrt{1+y}$. Ainsi,

$$y = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad X = 1 - \sqrt{1+y} \text{ OU } X = 1 + \sqrt{1+y}.$$

Or $X = e^x > 0$ et puisque $y \geqslant 0$, $1 + y \geqslant 1 \Rightarrow \sqrt{1+y} \geqslant 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1+y} \leqslant 0$. Ainsi, $X \neq 1 - \sqrt{1+y}$. Nécessairement,

$$y = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad X = 1 + \sqrt{1+y} \qquad \Leftrightarrow \qquad e^x = 1 + \sqrt{1+y} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \ln\left(1 + \sqrt{1+y}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in [\ln(2); +\infty[, \qquad f^{-1}(y) = \ln\left(1 + \sqrt{1+y}\right).}$$

4. **Etude asymptotique.**

4.1 Soit $f : x \mapsto \ln\left(x^3 + 2x + 1\right)$. On note que f est notamment bien définie sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty.$$

Regardons alors $f(x)/x$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln\left(x^3 + 2x + 1\right)}{x} \\
&= \frac{\ln\left(x^3\left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\right)}{x} \\
&= \frac{3\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x} \\
&= 3\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x}.
\end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et on a aussi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet en } +\infty \text{ une branche parabolique de direction horizontale } (Ox).}$$

4.2 Soit $f : x \mapsto \frac{4x^3+1}{(x+1)^2}$. On note que la fonction f est bien définie sur $]-1;+\infty[$ notamment. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{x^2}\frac{1+\frac{1}{4x^3}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} 4x\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = +\infty.$$

Puis,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times 4x\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} 4 \times \frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = 4.$$

Ensuite, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{4x^3+1}{(x+1)^2} - 4x \\ &= \frac{4x^3+1-4x\left(x^2+2x+1\right)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-8x^2-4x+1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-8x^2}{x^2}\frac{1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= -8\frac{1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 4x = -8.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ admet une asymptote oblique en } +\infty \text{ d'équation } y = -4x-8.}$$

4.3 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^4+x^2+1}$. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ notamment et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Puis, pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x} = \sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^2}} = \sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet une branche parabolique de direction verticale } (Oy).}$$

4.4 Soit $f : x \mapsto \frac{x+2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x+1 > 1 > 0$. Donc la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = -\infty.$$

De plus, pour tout $x < 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1+2\frac{\mathrm{e}^x}{x}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Puis, pour tout $x < 0$

$$f(x) - x = \frac{x+2\,\mathrm{e}^x-x\,\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{-x\,\mathrm{e}^x+2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Or par croissance comparée, $\lim_{x\to-\infty} -x\,\mathrm{e}^x = 0$. Donc

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y=-x \text{ en } -\infty.}$$

4.5 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x}$. La fonction f est notamment bien définie sur $[0;+\infty[$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus, pour tout $x>0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} = \sqrt{1+\frac{3}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Puis pour tout $x>0$,

$$f(x)-x = \sqrt{x^2+3x}-x = x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1\right).$$

Pour lever « l'indéterminé » multiplions par le conjugué :

$$f(x)-x = x\frac{1+\frac{3}{x}-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}.$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \frac{3}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote oblique d'équation } y = x+\frac{3}{2}.}$$

5. **Comparaison asymptotique.**

5.1 On a les égalités suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^3+5x^2-3x+2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}}$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = 1.$$

Donc par quotient $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}} = 1$ puis par produit,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(f(x)) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} f(x).}$$

5.2 Posons $u=\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On a alors les égalités suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{u\to0\\u>0}}\frac{\sin(3u)}{u^2} = \lim_{\substack{u\to0\\u>0}}\frac{\sin(3u)}{3u}\frac{3u}{u^2}.$$

Or d'après le cours, en posant $v = 3u \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\u>0}} \dfrac{\sin(3u)}{3u} = \lim\limits_{v\to 0} \dfrac{\sin(v)}{v} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\u>0}} \dfrac{3u}{u^2} = \lim\limits_{\substack{u\to 0\\u>0}} \dfrac{3}{u} = +\infty$.

Donc par produit,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \qquad \text{et donc} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f(x)\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} f(x).}$$

5.3 Posons $u = \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Alors, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{3}{x^2}}}{x^2} = \lim_{u\to+\infty} u\,\mathrm{e}^{-3u} = 0, \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(g(x)\right).}$$

5.4 Posons $u = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{\longrightarrow} +\infty$. Alors,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{x}\ln(x) = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u^2}\right)}{u} = \lim_{u\to+\infty} -2\frac{\ln(u)}{u}.$$

Donc par croissance comparée,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(g(x)\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x\to 0}{\ll} g(x).}$$

5.5 Pour tout $x \neq 0$, au voisinage de 0, on a les égalités suivantes :

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{3x + \sqrt{x^6 + 2x^2}} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} \frac{x^2}{3x + \sqrt{2}\,|x| \sqrt{1 + \frac{x^4}{2}}} = \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} \frac{1}{\frac{3}{x} + \frac{\sqrt{2}|x|}{x^2}\sqrt{1 + \frac{2}{x^4}}}.$$

Or, en posant $u = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, d'après le cours,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1.$$

De plus $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{\sqrt{2}\,|x|}{x^2}\sqrt{1 + \dfrac{2}{x^4}}\right) = 0$. Donc par produit,

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(f(x)\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) \underset{x\to 0}{\ll} f(x).}$$