Correction de l'interrogation 31 d'entrainement Géométrie de l'espace

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire est une application $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

- *(bilinéarité)* Pour tout $(x, y, x', y) \in E^4$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle \lambda x + \mu x' | y\rangle = \lambda \langle x|y\rangle + \mu \langle x'|y\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle x|\lambda y + \mu y'\rangle = \lambda \langle x|y\rangle + \mu \langle x|y'\rangle .$$

- *(symétrie)* Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.
- *(positive)* Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle \geqslant 0$.
- *(définie)* Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

1.2 Le déterminant est l'unique application det de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(C_1, \dots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

i. *(n-linéarité)* $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\forall C_i' \in \mathbb{R}^n$,

$$\det(C_1, \dots, \lambda C_i + \mu C_i', \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \mu \det(C_1, \dots, C_i', \dots, C_n) .$$

ii. *(alternance)* $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \neq j$, on a

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) .$$

iii. *(normalisation)* Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\det(\mathscr{C}) = 1$.

1.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Et dans ce cas, $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.

1.4 Soient A, B, C et M quatre points de l'espace. Alors,

$$M \in (ABC) \qquad \Leftrightarrow \qquad \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0.$$

1.5 Le produit vectoriel $\cdot\wedge\cdot$ est l'unique application de $\left(\mathbb{R}^3\right)^2$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant pour tout $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u'}, \vec{v'}\right) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^4$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- *(bilinéarité)* $\left(\lambda \vec{u} + \mu \vec{u'}\right) \wedge \vec{v} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u'} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \left(\lambda \vec{v} + \mu \vec{v'}\right) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u} \wedge \vec{v'}$.
- *(anti-symétrie)* $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- Si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}$ et $\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2}$.

1.6 La lecture de corrigé ne sert pas à grand chose, il faut chercher par soi même ;). Au premier qui trouve, j'offre une boîte de : mon premier est un artiste qui a aussi fait du piano, mon deuxième est un artiste amical, mon troisième est un artiste avec de grandes oreilles mon tout se mange à Pâques.

2. **Equations de droites et de plans.**

2.1 Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x+y-4z=6 \\ x-y+3z=2 \end{cases}$. On observe directement que

$$\boxed{\overrightarrow{n_1}\begin{bmatrix}2\\1\\-4\end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{n_2}\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix} \text{ sont des vecteurs normaux à } \mathcal{D}.}$$

Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+y-4z=6 \\ x-y+3z=2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3y-10z=2 \\ x-y+3z=2 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1-2L_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=\frac{2}{3}+\frac{10}{3}z \\ x=2+y-3z=2+\frac{2}{3}+\frac{10}{3}z-3z=\frac{8}{3}+\frac{z}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{8}{3}+\frac{z}{3} \\ y=\frac{2}{3}+\frac{10}{3}z \\ z=z \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x=\frac{8}{3}+\frac{t}{3} \\ y=\frac{2}{3}+\frac{10t}{3} \\ z=t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$$

De là on conclut que

$$\boxed{A(8/3,2/3,0) \text{ est un point de } \mathcal{D} \text{ et } \vec{u}\begin{bmatrix}1\\10\\3\end{bmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D}.}$$

NB : on pouvait aussi obtenir le vecteur directeur par le calcul suivant :

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{bmatrix}2\\1\\-4\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-10\\-3\end{bmatrix}$$

qui est bien colinéaire à $\vec{u}$.

2.2 Soient $A(-1,1,0)$ et $B(3,-1,1)$. On observe que $A(-1,1,0)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Donc une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x=-1+4t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$$

Méthode 1. Dès lors pour $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$, on a

$$M \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x=-1+4t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-1+4z \\ y=1-2z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-4z=-1 \\ y+2z=1 \end{cases}.$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x-4z+1=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}.}$$

On en déduit que $\overrightarrow{n_1}\begin{bmatrix}1\\0\\-4\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. *Attention à ne pas retourner* $\overrightarrow{n_2}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ *qui n'est pas orthogonal à* $\overrightarrow{n_1}$. Cependant, on a

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{n_1}=\begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}1\\0\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\17\\2\end{bmatrix}.$$

Alors $\overrightarrow{n_2}\begin{bmatrix}8\\17\\2\end{bmatrix}$ est normal à $\overrightarrow{AB}$ et donc à $\mathcal{D}$ et est aussi orthogonal à $\overrightarrow{n_1}$ *(vérifiez !)*. Conclusion,

$$\boxed{\overrightarrow{n_1}\begin{bmatrix}1\\0\\-4\end{bmatrix}\text{ et }\overrightarrow{n_2}\begin{bmatrix}8\\17\\2\end{bmatrix}\text{ sont deux vecteurs normaux à }\mathcal{D}\text{ et orthogonaux entre eux.}}$$

Méthode 2. On observe que $\overrightarrow{n_1}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\overrightarrow{AB}$ et donc à $\mathcal{D}$. De plus,

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{n_1}=\begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-8\\4\end{bmatrix}.$$

Alors $\overrightarrow{n_2}\begin{bmatrix}-5\\-8\\4\end{bmatrix}$ est normal à $\overrightarrow{AB}$ et donc à $\mathcal{D}$ et est aussi orthogonal à $\overrightarrow{n_1}$ *(vérifiez !)*. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{n_1}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\text{ et }\overrightarrow{n_2}\begin{bmatrix}-5\\-8\\4\end{bmatrix}\text{ sont deux vecteurs normaux à }\mathcal{D}\text{ et orthogonaux entre eux.}}$$

Soit $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{D} \quad&\Leftrightarrow\quad \left\langle\overrightarrow{AM}\middle|\overrightarrow{n_1}\right\rangle=0 \quad\text{et}\quad \left\langle\overrightarrow{AM}\middle|\overrightarrow{n_2}\right\rangle=0\\
&\Leftrightarrow\quad \left\langle\begin{bmatrix}x+1\\y-1\\z\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\rangle=0\text{ et }\left\langle\begin{bmatrix}x+1\\y-1\\z\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}-5\\-8\\4\end{bmatrix}\right\rangle=0\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}y-1+2z=0\\-5x-5-8y+8+4z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases}y+2z-1=0\\5x+8y-4z-3=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{D}:\ \begin{cases}y+2z-1=0\\5x+8y-4z-3=0.\end{cases}}$$

En faisant $L_2\leftarrow L_2-8L_1$, on retrouve les équations précédentes.

Méthode 3. On récupère les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ comme dans la méthode 2. Soit $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y-1+2z=0 \\ 4z-x-1=0 \\ -2x-2-4y+4=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-4z+1=0 \\ -2x-4y+2=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-4z+1=0 \\ -4y-8z+4=0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-4z+1=0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1.
\end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-4z+1=0. \end{cases}}$$

2.3 Soient $A\,(0,1,2)$, $B\,(-1,0,1)$, $C\,(1,-1,-3)$. On observe que $A\,(0,1,2)$ est un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ou $\overrightarrow{BA}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs **non colinéaires** et directeurs de $\mathcal{P}$. Par conséquent une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : \begin{cases} x = t+s \\ y = 1+t-2s \\ z = 2+t-5s \end{cases}.}$$

Méthode 1. Soient $M\,(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\,(t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = t+s \\ y = 1+t-2s \\ z = 2+t-5s \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = t+s \\ y-x = 1-3s \\ z-x = 2-6s \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = t+s \\ y-x = 1-3s \\ z-2y+x = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t = x-s = x - \frac{1-y+x}{3} \\ s = \frac{1-y+x}{3} \\ z-2y+x = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad z-2y+x = 0.
\end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : x - 2y + z = 0 \qquad \text{et } \vec{n}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{P}.}$$

Vérifiez que $\vec{n}$ est bien normal à $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.
De plus, on a

$$\overrightarrow{BA} \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\\-3\end{bmatrix}.$$

Posons $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. Alors $\vec{v}$ est normal à $\vec{n}$ donc est un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ et $\vec{v}$ est normal à $\overrightarrow{BA}$ donc, en renormalisant,

$$\boxed{\left(A\left(0,1,2\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right) \text{ forme un repère orthonormé de } \mathcal{P}.}$$

Méthode 2. On a

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}1\\-2\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\6\\-3\end{bmatrix}.$$

Posons $\vec{n}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$. Alors $\vec{n}$ est normal à $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ (deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$) donc

$$\boxed{\vec{n}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} \text{ est un vecteur normal de } \mathcal{P}.}$$

Puisque $A\left(0,1,2\right) \in \mathcal{P}$. Pour $M\left(x,y,z\right) \in \mathscr{E}$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix}x\\y-1\\z-2\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -x + 2y - 2 - z + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 2y + z = 0. \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : x - 2y + z = 0.}$$

De plus, on a

$$\overrightarrow{BA} \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\\-3\end{bmatrix}.$$

Posons $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. Alors $\vec{v}$ est normal à $\vec{n}$ donc est un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ et $\vec{v}$ est normal à $\overrightarrow{BA}$ donc, en renormalisant,

$$\boxed{\left(A\left(0,1,2\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right) \text{ forme un repère orthonormé de } \mathcal{P}.}$$

Méthode 3. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. Alors,

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z-2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -x+y-1 & 1 & -3 \\ -x+z-2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - xC_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad -\begin{vmatrix} -x+y-1 & -3 \\ -x+z-2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{en développant par rapport à } L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad -(6x-6y+6-3x+3z-6) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3x-6y+3z = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$:

$$\boxed{\mathcal{P} : x - 2y + z = 0.}$$

On construit alors le repère orthonormé comme dans l'une des méthodes précédentes.

2.4 Soit $\mathcal{P} : x + 2y - 3z + 4 = 0$. On observe que

$$\boxed{\vec{n}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ est un vecteur normal à } \mathcal{P}.}$$

Méthode 1. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad x + 2y - 3z + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = -2y + 3z - 4 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = -4 - 2t + 3s \\ y = t \\ z = s \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : \begin{cases} x = 4 - 2t + 3s \\ y = t \\ z = s \end{cases}, (t,s) \in \mathbb{R}^2.}$$

En particulier $A(-4,0,0)$ est un point de $\mathcal{P}$ *(vérifiez sur l'équation cartésienne)* et $\vec{u}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ mais malheureusement non orthogonaux. On a cependant,

$$\vec{n} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Alors, $\vec{v'}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n}$ et est donc un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ et il est aussi normal à $\vec{u}$. Or $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ et $\left\|\vec{v'}\right\| = \sqrt{9+36+25} = \sqrt{70}$. Conclusion,

$$\boxed{\left(A(-4,0,0), \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}\right) \text{ forme un repère orthonormé de } \mathcal{P}.}$$

Méthode 2. On observe que $\vec{u}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n}$ et donc est un vecteur directeur de $\mathcal{P}$. On a de plus,

$$\vec{n}\wedge\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\5\end{bmatrix}.$$

Alors, $\vec{v}\begin{bmatrix}3\\6\\5\end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n}$ et est donc un vecteur directeur de $\mathcal{P}$ et il est aussi normal à $\vec{u}$ et non colinéaire à $\vec{u}$. Or $\|\vec{u}\|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ et $\left\|\vec{v'}\right\|=\sqrt{9+36+25}=\sqrt{70}$. D'autre part, on observe que $A\,(0,-2,0)$ est un point de $\mathcal{P}$. Donc,

$$\boxed{\left(A\,(0,-2,0)\,,\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{bmatrix}3\\6\\5\end{bmatrix}\right)\text{ forme un repère orthonormé de }\mathcal{P}.}$$

On en déduit également l'équation paramétrique de $\mathcal{P}$ suivante :

$$\boxed{\mathcal{P}:\begin{cases}x=-2t+3s\\y=-2+t+6s\\z=5s\end{cases},(t,s)\in\mathbb{R}^2.}$$

2.5 Soient $\mathcal{D}:\begin{cases}x=2z+1\\y=z-1\end{cases}$ et $\mathcal{D}':\begin{cases}x=z+2\\y=3z-3\end{cases}$.

Méthode 1. On a $\mathcal{D}:\begin{cases}x-2z-1=0\\y-z+1=0\end{cases}$ et $\mathcal{D}':\begin{cases}x-z-2=0\\y-3z+3=0\end{cases}$ donc $\vec{n_1}\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$, $\vec{n_2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ sont des vecteurs non colinéaires et normaux à $\mathcal{D}$ et $\vec{n_1'}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{n_2'}\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}$ sont des vecteurs non colinéaires et normaux à $\mathcal{D}'$. On calcule alors

$$\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad\vec{n_1'}\wedge\vec{n_2'}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\vec{u}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{u'}\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. D'autre part, $\mathcal{D}$ passe par $A\,(1,-1,0)$ et $\mathcal{D}'$ par $A'\,(2,-3,0)$ donc on obtient les équations paramétriques suivantes :

$$\boxed{\mathcal{D}:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=t\end{cases}\quad\text{et}\quad\mathcal{D}':\begin{cases}x=2+t\\y=-3+3t\\z=t\end{cases}.}$$

Méthode 2. Soit $M\,(x,y,z)\in\mathscr{E}$. On a

$$M\in\mathcal{D}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=2z+1\\y=z-1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=2t+1\\y=t-1\\z=t\end{cases}$$

$$M\in\mathcal{D}'\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=z+2\\y=3z-3\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=t+2\\y=3t-3\\z=t\end{cases}.$$

On obtient alors les équations

$$\boxed{\mathcal{D}:\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=t\end{cases}\quad \text{et}\quad \mathcal{D}':\begin{cases}x=2+t\\ y=-3+3t\\ z=t\end{cases}.}$$

Pour l'intersection, deux méthodes. *Méthode 1.* Soit $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{D}\cap\mathcal{D}' &\Leftrightarrow \begin{cases}x=2z+1\\ y=z-1\\ x=z+2\\ y=3z-3\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x=2z+1\\ y=z-1\\ 0=-z+1\\ 0=2z-2\end{cases} \qquad \begin{array}{l}L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_2\end{array}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=0\\ z=1\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\{(3,0,1)\}\neq\emptyset$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}\text{ et }\mathcal{D}'\text{ sont sécantes.}}$$

Méthode 2. Soit $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{D}\cap\mathcal{D}' &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=t\end{cases}\quad\text{et}\quad \exists s\in\mathbb{R},\begin{cases}x=2+s\\ y=-3+3s\\ z=s\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \exists(t,s)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=t\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}1+2t=2+s\\ -1+t=-3+3s\\ t=s\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=t\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}1+2t=2+t\\ -1+t=-3+3t\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+t\\ z=t\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}t=1\\ 2t=2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2=3\\ y=-1+1=0\\ z=1\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'=\{(3,0,1)\}\neq\emptyset$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}\text{ et }\mathcal{D}'\text{ sont sécantes.}}$$

On sait (déjà vu ou alors par les équations paramétriques) que $\vec{u}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{u'}\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$, $A(1,-1,0)$ un point de $\mathcal{D}$ et $A'(2,-3,0)$ de $\mathcal{D}'$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$

sont deux vecteurs de $\mathcal{P}$. De plus $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ **ne sont pas colinéaires** et ils engendrent donc $\mathcal{P}$. Comme $A \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}$, on en déduit l'équation paramétrique suivante :

$$\boxed{\mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 + 2t + s \\ y = -1 + t + 3s \\ z = t + s \end{cases}.}$$

Pour l'équation cartésienne, trois méthodes. *Méthode 1.* On a

$$\vec{u} \wedge \vec{u'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Donc $\vec{n} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Soit $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle = -2x + 2 - y - 1 + 5z = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x + y - 5z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : 2x + y - 5z - 1 = 0.}$$

Méthode 2. Puisque $A(1, -1, 0) \in \mathcal{P}$ et que $\vec{u}(2, 1, 1)$ et $\vec{u'}(1, 3, 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires directeurs de $\mathcal{P}$, pour $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u'}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3x + y + 4 & -5 & 3 \\ -x + z + 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - (x-1) C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -3x + y + 4 & -5 \\ -x + z + 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{en développant par rapport à } L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x - y - 4 - 5x + 5z + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x - y + 5z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : 2x + y - 5z - 1 = 0.}$$

Méthode 3. Soit $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{P} \quad&\Leftrightarrow\quad \exists(t,s)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}x=1+2t+s\\ y=-1+t+3s\\ z=t+s\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \exists(t,s)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}x-2z=1-s\\ y-z=-1+2s\\ z=t+s\end{cases} \qquad \begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1-2L_3\\ L_2\leftarrow L_2-L_3\end{array}\\
&\Leftrightarrow\quad \exists(t,s)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}x-2z=1-s\\ 2x+y-5z=1\\ z=t+s\end{cases} \qquad L_2\leftarrow L_2+2L_1\\
&\Leftrightarrow\quad \exists(t,s)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}x-2z=1-s\\ z=t+s\\ 2x+y-5z=1\end{cases} \qquad L_2\leftarrow L_3\\
&\Leftrightarrow\quad \exists(t,s)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}s=1-x+2z\\ t=z-s=-1+x-z\\ 2x+y-5z=1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad 2x+y-5z-1=0.
\end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P}:2x+y-5z-1=0.}$$

3. **Projeté orthogonal.**

3.1 Soient $\mathcal{D}:\begin{cases}x-y=-1\\ x-z=0\end{cases}$ une droite de l'espace, $M(1,2,3)$ un point de l'espace.

Méthode 1. Soit $A(x,y,z)\in\mathscr{E}$ un point de l'espace. On a les équivalences suivantes :

$$A\in\mathcal{D}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}y=x+1\\ z=x\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=t\\ y=t+1\\ z=t\end{cases}.$$

Donc $A(0,1,0)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Méthode 2. Les vecteurs $\vec{n_1}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ sont normaux à $\mathcal{D}$. On a

$$\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Donc $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. De plus on remarque que pour $A(-1,0,1)$, on a $x-y=-1-0=-1$ et $x-z=-1+1=0$ donc $A\in\mathcal{D}$.

Méthode 1. Avec H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, dans le triangle rectangle AMH, on sait que $\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)\right|=\frac{HM}{AM}$. Autrement dit,

$$d(M,\mathcal{D})=HM=AM\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)\right|=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\|\vec{u}\|\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)\right|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

D'où,

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\left\|\begin{bmatrix}1-3\\3-1\\1-1\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{3}} = \frac{\left\|\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+4}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Méthode 2. Par le théorème de Pythagore, on observe que

$$\begin{aligned}
d(M,\mathcal{D})^2 &= \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - \left\|\left\langle \overrightarrow{AM}\middle|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\rangle\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\|^2\\
&= \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - \left(\left\langle \overrightarrow{AM}\middle|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\rangle\right)^2\\
&= \left\|\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\|^2 - \left(\left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt{1+1+1}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle\right)^2\\
&= 1+1+9-\frac{(1+1+3)^2}{3}\\
&= 11-\frac{25}{3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

De plus,

$$H = A + \frac{\left\langle\overrightarrow{AM}\middle|\vec{u}\right\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1+1+3}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\\8\\5\end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{2\sqrt{6}}{3} \qquad \text{et} \qquad H\begin{bmatrix}5/3\\8/3\\5/3\end{bmatrix}.}$$

3.2 Soient $A(0,1,0)$, $B(2,3,-1)$ et $M(0,0,5/2)$ trois points de l'espace. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).
Méthode 1. Avec H le projeté orthogonal de M sur (AB), dans le triangle rectangle AMH, on sait que $\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)\right| = \frac{HM}{AM}$. Autrement dit,

$$d(M,(AB)) = HM = AM\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)\right| = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\|\vec{u}\|\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)\right|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

D'où,

$$d(M,(AB)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\|\begin{bmatrix}0\\-1\\5/2\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{\left\|\begin{bmatrix}1-5\\5\\2\end{bmatrix}\right\|}{3} = \frac{\sqrt{16+25+4}}{3} = \frac{\sqrt{45}}{3} = \sqrt{5}.$$

Méthode 2. Par le théorème de Pythagore, on observe que

$$\begin{aligned}
d\left(M,(AB)\right)^2 &= \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - \left\|\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\|^2 \\
&= \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - \left(\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\rangle\right)^2 \\
&= \left\|\begin{bmatrix}0\\-1\\5/2\end{bmatrix}\right\|^2 - \left(\left\langle \begin{bmatrix}0\\-1\\5/2\end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{4+4+1}}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}\right\rangle\right)^2 \\
&= 1 + \frac{25}{4} - \frac{\left(-2-\frac{5}{2}\right)^2}{9} \\
&= \frac{29}{4} - \frac{81/4}{9} = \frac{29}{4} - \frac{9}{4} = 5.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$d\left(M,\mathcal{D}\right) = \sqrt{5}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
H = A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{u}\right\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix}0\\-1\\5/2\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}\right\rangle}{9}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{-2-\frac{5}{2}}{9}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1/2\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

On peut vérifier $HM = \left\|\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = d\left(M,(AB)\right)$ *OK !*

Conclusion,

$$\boxed{d\left(M,(AB)\right) = \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad H\begin{bmatrix}-1\\0\\1/2\end{bmatrix}.}$$

3.3 Soient $\mathcal{P} : -3x+2y+z+7=0$ un plan de l'espace et $M(-7,6,2)$ un point de l'espace. Alors $\vec{n}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $A(0,0,-7)$ est un point de $\mathcal{P}$. Donc

$$\begin{aligned}
d\left(M,\mathcal{P}\right) &= \left\|\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| \\
&= \left|\left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix}-7\\6\\9\end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{9+4+1}}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}\right\rangle\right| \\
&= \frac{|21+12+9|}{\sqrt{14}} \\
&= \frac{42}{\sqrt{14}} \\
&= \frac{42\sqrt{14}}{14} \\
&= \frac{6\sqrt{14}}{2} \\
&= 3\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$H = M \pm d(M,\mathcal{P})\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{bmatrix}-7\\6\\2\end{bmatrix} \pm 3\sqrt{14}\times\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\6\\2\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}-9\\6\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-16\\12\\5\end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

Or $-3(-16)+2\times 12+5+7\neq 0$, donc $(-16,12,5)\notin\mathcal{P}$ et on a bien $-3\times 2-1+7=0$. Conclusion,

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = 3\sqrt{14} \qquad \text{et} \qquad H\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}.}$$

3.4 Soient $\mathcal{P} : -4x+2y-3z-5=0$ un plan de l'espace et $M(7,-5,5)$ un point de l'espace. Le vecteur $\vec{n}\begin{bmatrix}-4\\2\\-3\end{bmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$ et $A(0,1,-1)$ est un point de $\mathcal{P}$. Donc

$$\begin{aligned}
d(M,\mathcal{P}) &= \left\|\left\langle \overrightarrow{AM}\middle|\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| \\
&= \left|\left\langle \overrightarrow{AM}\middle|\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix}7\\-6\\6\end{bmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt{16+4+9}}\begin{bmatrix}-4\\2\\-3\end{bmatrix}\right\rangle\right| \\
&= \frac{|-28-12-18|}{\sqrt{29}} \\
&= \frac{58}{\sqrt{29}} \\
&= 2\sqrt{29}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$H = M \pm d(M,\mathcal{P})\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{bmatrix}7\\-5\\5\end{bmatrix} \pm 2\sqrt{29}\times\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{bmatrix}-4\\2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-5\\5\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}-8\\4\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix}15\\-9\\11\end{bmatrix}.$$

Or $-4\times 15+2(-9)-3\times 11-5=-60-18-33-5\neq 0$ donc $(15,-9,11)\notin\mathcal{P}$ et $-4\times(-1)+2\times(-1)-3\times(-1)-5=0$. Conclusion,

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = 2\sqrt{29} \qquad \text{et} \qquad H\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}.}$$

3.5 Soit $\mathcal{D} : \begin{cases}x+y-3z=-1\\2x+y-5z=0\end{cases}$ et $M(1,0,0)$.

Méthode 1. Soit $A(x,y,z)\in\mathscr{E}$ un point de l'espace. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
A\in\mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x+y-3z=-1\\2x+y-5z=0\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x+y-3z=-1\\-y+z=1\end{cases} \quad L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x=-1-y+3z=1-y+3+3y=4+2y\\z=1+y\end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=4+2t\\y=t\\z=1+t\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $A\left(4,0,1\right)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Méthode 2. Les vecteurs $\vec{n_1}\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{bmatrix}2\\1\\-5\end{bmatrix}$ sont normaux à $\mathcal{D}$. On a

$$\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}=\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}2\\1\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

Donc $\vec{u}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ est normal à $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. De plus on remarque que pour $A\left(1,-2,0\right)$, on a $x+y-3z=1-2=-1$ et $2x+y-5z=2-2=0$ donc $A\in\mathcal{D}$.

Méthode 1. Avec H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, dans le triangle rectangle AMH, on sait que $\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)\right|=\frac{HM}{AM}$. Autrement dit,

$$d\left(M,\mathcal{D}\right)=HM=AM\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)\right|=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|\left\|\vec{u}\right\|\left|\sin\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)\right|}{\left\|\vec{u}\right\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

D'où,

$$d\left(M,\mathcal{D}\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}=\frac{\left\|\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\left\|\begin{bmatrix}2\\0\\-4\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{10}{3}}=\frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Méthode 2. Par le théorème de Pythagore, on observe que

$$\begin{aligned}d\left(M,\mathcal{D}\right)^2&=\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2-\left\|\left\langle\overrightarrow{AM}\middle|\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}\right\rangle\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}\right\|^2\\&=\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2-\left(\left\langle\overrightarrow{AM}\middle|\frac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|}\right\rangle\right)^2\\&=\left\|\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right\|^2-\left(\left\langle\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt{4+1+1}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle\right)^2\\&=4-\frac{\left(2\right)^2}{6}\\&=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$d\left(M,\mathcal{D}\right)=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{30}}{3}.$$

De plus,

$$H=A+\frac{\left\langle\overrightarrow{AM}\middle|\vec{u}\right\rangle}{\left\|\vec{u}\right\|^2}\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}+\frac{\left\langle\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle}{6}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}+\frac{2}{6}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\\-5\\1\end{bmatrix}.$$

On vérifie que $HM=\left\|\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\5\\-1\end{bmatrix}\right\|=\frac{\sqrt{4+25+1}}{3}=\frac{\sqrt{30}}{3}=d\left(M,\mathcal{D}\right)$ *OK !*

Conclusion,

$$\boxed{d\left(M,\mathcal{D}\right)=\frac{\sqrt{30}}{3}\qquad\text{et}\qquad H\begin{bmatrix}5/3\\-5/3\\1/3\end{bmatrix}.}$$

4. **Intersection.**

4.1 Soient $A\,(1,2,-3)$, $B\,(-1,2,0)$ et $\mathcal{P} : 2x-y+3z-2=0$. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}-2\\0\\3\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB). Donc des équations paramétriques de (AB) sont

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2 \\ z = -3+3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M\,(x,y,z)$ un point de l'espace. On a

$$\begin{aligned}
M \in (AB)\cap\mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R}, x = 1-2t,\ y=2,\ z=-3+3t \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1-2t,\ y=2,\ z=-3+3t \\ 2\,(1-2t)-2+3\,(-3+3t)-2=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1-2t,\ y=2,\ z=-3+3t \\ 2-4t-2-9+9t-2=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1-2t,\ y=2,\ z=-3+3t \\ 5t=11 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 1-2\times\frac{11}{5},\ y=2,\ z=-3+3\times\frac{11}{5} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\frac{17}{5},\ y=2,\ z=\frac{-15+33}{5}=\frac{18}{5}.
\end{aligned}$$

Conclusion, il existe un unique point d'intersection donné par

$$\boxed{M\,(-17/5, 2, 18/5)\,.}$$

4.2 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x+y-3z=2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x+y-z=4 \\ x-y-5z=-6 \end{cases}$.

Soit $M\,(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x+y-3z=2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+z=3 \\ 7y-6z=-7 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3+2y-z = 3+\frac{12}{7}z-2-z = 1+\frac{5}{7}z \\ y = \frac{6}{7}z-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1+5t \\ y = -1+6t \\ z = 7t. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}\begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $A\,(1,-1,0)$ un point de $\mathcal{D}$.

On vérifie que A vérifie les équations de $\mathcal{D}$ et que $\vec{u}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{n_1}\,(1,-2,1)$ et $\overrightarrow{n_2}\,(3,1,-3)$.

De même pour $\mathcal{D}'$, soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D}' \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-z=4 \\ x-y-5z=-6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-z=4 \\ -2y-4z=-10 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-z=4-y+z=4+2z-5+z=-1+3z \\ y=-2z+5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x=-1+3t \\ y=5-2t \\ z=t. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{u'} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ et $A'(-1,5,0)$ un point de $\mathcal{D}'$.

On vérifie que A' vérifie les équations de $\mathcal{D}'$ et que $\overrightarrow{u'}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{n_1'}(1,1,-1)$ et $\overrightarrow{n_2'}(1,-1,-5)$.
Par suite on observe que

$$\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sont coplanaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \overrightarrow{u'}\right) = 0.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \overrightarrow{u'}\right) &= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\
&= 7 \begin{vmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -14 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } C_1 \\
&= -14(3-7) \\
&= 56 \neq 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les droites } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ ne sont pas coplanaires.}}$$

4.3 Soient $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(1,-1,0)$ et dirigé par $\vec{u}(2,1,-1)$ et $\vec{v}(1,4,1)$ et le plan $\mathcal{P}'$ passant par $B(1,2,1)$, $C(1,4,0)$ et $E(1,-1,3)$. Commençons par déterminer des équations cartésienne de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
Méthode 1. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 4 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-2y-3 & 0 & -7 \\ y+1 & 1 & 4 \\ y+z+1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad +1 \begin{vmatrix} x-2y-3 & -7 \\ y+z+1 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } C_2 \\
&\Leftrightarrow \quad 5x-10y-15+7y+7z+7=0 \\
&\Leftrightarrow \quad 5x-3y+7z=8.
\end{aligned}$$

Méthode 2. Soit $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. On a
$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$
$\vec{n}$ est un vecteur normal. Dès lors pour $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$, on a
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 5x - 5 - 3y - 3 + 7z = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 5x - 3y + 7z = 8. \end{aligned}$$
Méthode 3. Avec le même vecteur $\vec{n} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{P} : 5x - 3y + 7z = d$. Or $A(1,-1,0)\,\mathcal{P}$ donc
$$d = 5 + 3 = 8.$$
D'où
$$\mathcal{P} : 5x - 3y + 7z = 8.$$
On procède de même pour $\mathcal{P}'$.
Méthode 1. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y-2 & 2 & -3 \\ z-1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad +(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)(4-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1. \end{aligned}$$
Méthode 2. Soit $\vec{n'} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BE}$. On a
$$\vec{n'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
$\vec{n'}$ est un vecteur normal. Dès lors pour $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$, on a
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{BM} \middle| \vec{n'} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1. \end{aligned}$$
Méthode 3. Avec le même vecteur $\vec{n} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{P}' : x = d$. Or $B(1,2,1)\,\mathcal{P}'$ donc
$$d = 1$$
D'où
$$\mathcal{P}' : x = 1.$$

Puisque $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, on note que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles et donc sont sécants et s'intersectent en une droite. Posons $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. On a directement :

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} 5x - 3y + 7z = 8 \\ x = 1 \end{cases}.}$$

Méthode 1. Soit $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x - 3y + 7z = 8 \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3y + 7z = 3 \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -1 + \frac{7}{3} z \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc des équations paramétriques de $\mathcal{D}$ sont

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$$

Méthode 2. On note que $\overrightarrow{n_1}(5, -3, 7)$ et $\overrightarrow{n_2}(1, 0, 0)$ sont deux vecteurs normaux non colinéaires de $\mathcal{D}$. Posons $\vec{w} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$. On a

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{w}(0, 7, 3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. De plus, on observe que $F(1, -1, 0)$ vérifie $x = 1$ et $5x - 3y + 7z = 5 + 3 = 8$. Donc $F \in \mathcal{D}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 7t \\ z = 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$$

4.4 Calculons la distance de $\Omega(1, -2, 3)$ à $\mathcal{P} : x + y + z = -4$. On note que $\vec{n}(1, 1, 1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $A(-4, 0, 0) \in \mathcal{P}$. Par suite,

$$\begin{aligned} d(\Omega, \mathcal{P}) &= \left\| \left\langle \overrightarrow{A\Omega} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{A\Omega} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{|5 - 2 + 3|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dès lors pour être tangente à $\mathcal{P}$, la sphère a pour rayon $R = 2\sqrt{3}$. Ainsi, son équation cartésienne est donnée par

$$\boxed{\mathcal{S} : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 12.}$$

4.5 Soient $\mathcal{P}$: $3x+4z=-1$ et $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(2,-1,1)$ et de rayon $R=3$. Notons $\mathcal{C}=\mathcal{P}\cap\mathcal{S}$. On note que

$$\mathcal{S}:\ (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9.$$

On note que $\vec{n}(3,0,4)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $A(1,0,-1)\in\mathcal{P}$. On calcule alors,

$$\begin{aligned}
d(\Omega,\mathcal{P}) &= \left\|\left\langle \overrightarrow{A\Omega}\middle|\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\|\\
&= \left|\left\langle \overrightarrow{A\Omega}\middle|\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle\right|\\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt{9+16}}\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}\right\rangle\right|\\
&= \frac{|3+8|}{5}\\
&= \frac{11}{5}.
\end{aligned}$$

Puisque $d(\Omega,\mathcal{P})=\frac{11}{5}<\frac{15}{5}=3=R$, on en déduit que $\mathcal{C}=\mathcal{P}\cap\mathcal{S}$ est bien un cercle dont le centre est donné par H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned}
H &= \Omega+\left\langle \overrightarrow{\Omega A}\middle|\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\rangle\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\\
&= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}+\left\langle \begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}\middle|\frac{1}{\sqrt{9+16}}\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{9+16}}\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}+\frac{-3-8}{25}\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{25}\left(\begin{bmatrix}50\\-25\\25\end{bmatrix}-11\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{25}\begin{bmatrix}17\\-25\\-19\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Soit $B\in\mathcal{C}$. On observe que le triangle $BH\Omega$ est rectangle en H. Donc par le théorème de Pythagore,

$$r^2=HB^2=B\Omega^2-H\Omega^2=R^2-d(\Omega,\mathcal{P})^2=9-\frac{121}{25}=\frac{225-121}{25}=\frac{104}{25}=\frac{4\times 26}{25}.$$

Donc le rayon du cercle est de $\frac{2\sqrt{26}}{5}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{C}\text{ est un cercle de centre }H(17/25,-1,-19/25)\text{ et de rayon }r=\frac{2\sqrt{26}}{5}.}$$

5. **Calculer un déterminant.**

5.1 On remarque que A possède une colonne nulle ! Donc $\boxed{\det(A)=0}$ et la matrice A n'est donc pas inversible.

5.2 Le parallélépipède est engendré par $\overrightarrow{AB}(0,1,1)$, $\overrightarrow{AD}(1,0,1)$ et $\overrightarrow{AE}(1,1,0)$. Donc son volume est donné par $\mathscr{V}_{ABCDEFGH}=\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\right|$. Or

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&-1\end{vmatrix} && C_3\leftarrow C_3-C_2\\
&=-\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix} && \textit{en dévoloppant par rapport à la première ligne}\\
&=-(-1-1)=2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{V}_{ABCDEFGH}=|2|=2.}$$

5.3 Par développement par rapport à la première ligne, on observe que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^n a_0 \det(I_{n-1}) = (-1)^n a_0.$$

Conclusion, $\boxed{\det(A) = (-1)^n a_0}$. En particulier, $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } a_0 \neq 0}$.

5.4 Calculons,

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -11 & 6 \end{vmatrix} \quad \textit{en dévoloppant par rapport à la première ligne} \\ &= 42 - 33 = 9. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\det(A) = 9 \neq 0 \qquad \text{donc } A \text{ est inversible.}}$$

5.5 Par opérations élémentaires, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

Par développement par rapport à la première colonne puis la première ligne,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3(6-2) + 2(-4+3) = -12 - 2 = -14.$$

Conclusion, $\boxed{\det(A) = -14 \neq 0}$. En particulier, $\boxed{A \text{ est inversible}}$.