# Interrogation 32 d'entrainement
# Géométrie de l'espace

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Définir un produit scalaire.
   1.2 Donner la définition d'un déterminant sur $(\mathbb{R}^n)^n$.
   1.3 Enoncer les propriétés du déterminant.
   1.4 Caractériser par le déterminant le fait qu'un point appartiennent au plan $(ABC)$.
   1.5 Définir le produit vectoriel.
   1.6 Mon premier est un savant de mauvaise foi, mon deuxième est un fruit maniaque, mon troisième a des origines diverses et fabrique un tapis, mon quatrième a très facilement repéré Al, mon tout est le thème de cette interro !

   **Révisions**

   1.7 Définir une probabilité et une variable aléatoire réelle.
   1.8 Définir un système complet d'évènements et une distribution de probabilité.
   1.9 Définir les trois lois usuelles.
   1.10 Enoncer la formule des probabilités composées.
   1.11 Enoncer la formule de Bayes.
   1.12 Définir et caractériser l'indépendance de deux événements.
   1.13 Définir les deux types d'indépendance pour une famille d'évènements.

2. **Equations de droites et de plans.**
   2.1 Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x+y-4z=6 \\ x-y+3z=2 \end{cases}$. Déterminer une équation paramétrique, des vecteurs normaux, un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
   2.2 Soient $A(-1,1,0)$ et $B(3,-1,1)$. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de $\mathcal{D}=(AB)$. Déterminer des vecteurs normaux à $\mathcal{D}$, orthogonaux entre eux.
   2.3 Soient $A(0,1,2)$, $B(-1,0,1)$, $C(1,-1,-3)$. Déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique de $\mathcal{P}=(ABC)$. Préciser un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et un repère orthonormée de $\mathcal{P}$.
   2.4 Soit $\mathcal{P} : x+2y-3z+4=0$. Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{P}$. Préciser un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et un repère orthonormée de $\mathcal{P}$.
   2.5 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x=2z+1 \\ y=z-1 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x=z+2 \\ y=3z-3 \end{cases}$. Déterminer des équations paramétriques de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{D}'$. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes et déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ contenant ces deux droites.

3. **Projeté orthogonal.**
   3.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x-y=-1 \\ x-z=0 \end{cases}$ une droite de l'espace, $M(1,2,3)$ un point de l'espace. Calculer la distance de $M$ à $\mathcal{D}$ et déterminer les coordonnées de $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{D}$.
   3.2 Soient $A(0,1,0)$, $B(2,3,-1)$ et $M(0,0,5/2)$ trois points de l'espace. Calculer la distance de $M$ à $(AB)$ et déterminer les coordonnées de $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $(AB)$.
   3.3 Soient $\mathcal{P} : -3x+2y+z+7=0$ un plan de l'espace et $M(-7,6,2)$ un point de l'espace. Calculer la distance de $M$ à $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{P}$.
   3.4 Soient $\mathcal{P} : -4x+2y-3z-5=0$ un plan de l'espace et $M(7,-5,5)$ un point de l'espace. Calculer la distance de $M$ à $\mathcal{P}$ et déterminer les coordonnées de $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{P}$.
   3.5 Calculer la distance de $M(1,0,0)$ à la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}$ et déterminer les coordonnées de $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{D}$.

4. **Intersection.**

4.1 Soient $A\,(1,2,-3)$, $B\,(-1,2,0)$ et $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 2 = 0$. Déterminer des équations paramétriques de $(AB)$ et en déduire l'ensemble des points d'intersection de $(AB)$ avec $\mathcal{P}$.

4.2 Montrer que les droites $\mathcal{D} : \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - 3z = 2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 5z = -6 \end{cases}$ ne sont pas coplanaires.

4.3 Déterminer des équations cartésiennes et paramétriques de l'intersection de $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A\,(1,-1,0)$ et dirigé par $\vec{u}\,(2,1,-1)$ et $\vec{v}\,(1,4,1)$ et le plan $\mathcal{P}'$ passant par $B\,(1,2,1)$, $C\,(1,4,0)$ et $E\,(1,-1,3)$.

4.4 Déterminer une équation de la sphère de centre $\Omega\,(1,-2,3)$ tangente au plan $\mathcal{P} : x + y + z = -4$.

4.5 Soient $\mathcal{P} : 3x + 4z = -1$ et $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega\,(2,-1,1)$ et de rayon $R = 3$. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

5. **Calculer un déterminant.**

5.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de $A$. $A$ est-elle inversible ?

5.2 Soient $A\,(1,-2,3)$, $B\,(1,-1,4)$, $C\,(2,-1,5)$, $D\,(2,-2,4)$, $E\,(2,-1,3)$, $F\,(2,0,4)$, $G\,(3,0,5)$, $H\,(3,-1,4)$ des points de l'espace. On admet que $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Calculer son volume.

5.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de $A$. $A$ est-elle inversible ?

5.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de $A$. $A$ est-elle inversible ?

5.5 Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de $A$. $A$ est-elle inversible ?