

Correction de l'interrogation 30 d'entraînement Géométrie du plan

1. Restituer le cours.

1.1 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Un produit scalaire est une application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie sur E^2 à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant

- (*bilinéarité*) Pour tout $(x, y, x', y) \in E^4$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle \lambda x + \mu x' | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x' | y \rangle \quad \text{et} \quad \langle x | \lambda y + \mu y' \rangle = \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle x | y' \rangle.$$

- (*symétrie*) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$.
- (*positive*) Pour tout $x \in E$, $\langle x | x \rangle \geq 0$.
- (*définie*) Pour tout $x \in E$, $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

1.2 Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel, $\|\cdot\|$ une norme sur E , $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

- (*définie*) $\|x\| = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow x = 0_E$
- (*positivité*) $\|x\| \geq 0$
- (*pseudo-linéarité*) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (*norme de la somme*) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$
- (*Pythagore*) si x et y sont orthogonaux alors, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

1.3 Le déterminant est l'unique application \det de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans \mathbb{R} vérifiant pour tout $(C_1, \dots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- i. (*n-linéarité*) $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall C'_i \in \mathbb{R}^n$,

$$\det(C_1, \dots, \lambda C_i + \mu C'_i, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + \mu \det(C_1, \dots, C'_i, \dots, C_n).$$

- ii. (*alternance*) $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j$, on a

$$\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n).$$

- iii. (*normalisation*) Si \mathcal{C} est la base canonique de \mathbb{R}^n , $\det(\mathcal{C}) = 1$.

1.4 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Alors,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

1.5 Soient \vec{u} un vecteur non nul du plan et \vec{v} un vecteur du plan. Le projeté orthogonal du \vec{v} sur \vec{u} est défini comme étant le vecteur

$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left\langle \vec{v} \left| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right. \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

1.6 Un crétin sphérique est un individu gonflé (bien sûr) fermé et borné (comme la sphère en tant que partie de \mathbb{R}^3), et ce quel que soit le point de vue par lequel on l'observe!

Cette insulte est de Zwicky un astrophysicien du XXIème siècle réputé pour ses idées, ses découvertes de supernovae et... son caractère profondément irascible.

2. Equations de droites et de cercles.

2.1 Soient $A(3, -1)$ et $B(2, 1)$. On note que $\overrightarrow{AB}(-1, 2)$ est un vecteur directeur de (AB) et $A(3, -1)$ un point de (AB) . On obtient donc les équations paramétriques suivantes :

$$(AB) : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Méthode 1. On observe que $\vec{n}(2, 1)$ est un vecteur normal à (AB) . Pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a donc

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x - 3 \\ y + 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 6 + y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y = 5. \end{aligned}$$

Méthode 2. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 3 & -1 \\ y + 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 6 + y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y = 5. \end{aligned}$$

Méthode 3. A l'aide des équations paramétriques, pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t = 3 - x \\ y = -1 + 2(3 - x) = 5 - 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 2x + y = 5. \end{aligned}$$

Méthode 4. On observe que $\vec{n}(2, 1)$ est un vecteur normal à (AB) . Donc une équation cartésienne de (AB) est donnée pour un $d \in \mathbb{R}$ par

$$2x + y = d.$$

Or $A(3, -1) \in (AB)$ donc

$$6 - 1 = d \Leftrightarrow d = 5.$$

D'où $(AB) : 2x + y = 5$.

Conclusion, dans tous les cas une équation cartésienne de (AB) est donnée par

$$(AB) : 2x + y = 5.$$

2.2 Soient $A(1, 1)$ et $B(3, 7)$. Soit \mathcal{D} la médiatrice de $[AB]$. Soit I le milieu de $[AB]$. On a

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 7}{2} = 4.$$

Donc $I(2, 4)$ est un point de \mathcal{D} . De plus $\overrightarrow{AB}(2, 6)$ est un vecteur normal à \mathcal{D} ou encore $\vec{n}(1, 3)$ est un vecteur normal de \mathcal{D} .

Méthode 1. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{IM} | \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x - 2 \\ y - 4 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2 + 3y - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y = 14. \end{aligned}$$

Méthode 2. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D} : x + 3y = d$. Or $I(2, 4) \in \mathcal{D}$. Donc

$$2 + 12 = d \Leftrightarrow d = 14.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} : x + 3y = 14.}$$

Méthode 1. Puisque $\vec{n}(1, 3)$ est normal, $\vec{u}(-3, 1)$ est directeur de \mathcal{D} . De plus $I(2, 4) \in \mathcal{D}$. Donc

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

Méthode 2. Par les équations paramétriques, pour $M(x, y) \in \mathcal{D}$,

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x + 3y = 14 \Leftrightarrow x = 14 - 3y \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 14 - 3t \\ y = t \end{cases}.$$

On obtient,

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 14 - 3t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2.3 Puisque $\vec{n}(3, 2)$ est un vecteur normal à \mathcal{D} , il est aussi normal à \mathcal{D}' .

Méthode 1. Soit $M(x, y) \in \mathcal{D}'$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 3 + 2y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 2y = 1. \end{aligned}$$

Méthode 2. Il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D}' : 3x + 2y = d$. Or $A(1, -1) \in \mathcal{D}'$. Donc

$$3 - 2 = d \Leftrightarrow d = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}' : 3x + 2y = 1.}$$

Méthode 1. Puisque $\vec{n}(3, 2)$ est normal, $\vec{u}(-2, 3)$ est directeur de \mathcal{D}' . De plus $A(1, -1) \in \mathcal{D}'$. Donc

$$\boxed{\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

Méthode 2. Par les équations paramétriques, pour $M(x, y) \in \mathcal{D}'$,

$$M \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow 3x + 2y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1-3t}{2} \end{cases}.$$

On obtient,

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1-3t}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2.4 Soit \mathcal{C} le cercle de centre $\Omega(-2, -1)$ et passant par $A(1, 1)$. Soit R son rayon. On a

$$R = \Omega A = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

Ainsi, une équation cartésienne est

$$\boxed{\mathcal{C} : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 13.}$$

Des équations paramétriques sont

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = -2 + \sqrt{13} \cos(\theta) \\ y = -1 + \sqrt{13} \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [0; 2\pi[\text{ (ou } \mathbb{R} \text{)}.$$

2.5 Soient $A(1, 0)$ et $B(3, 2)$. Soit \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$. On peut procéder en notant que Ω le centre est le milieu de $[AB]$ et $R = \frac{AB}{2}$ ou utiliser la proposition V.8. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow ABM \text{ est rectangle en } M \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{BM} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + y^2 - 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + 3 + (y-1)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2. \end{aligned}$$

Conclusion, une équation cartésienne est donnée par

$$\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

On note alors que $\Omega(2, 1)$ est le centre du cercle et $R = \sqrt{2}$ son rayon. Ainsi, des équations paramétriques sont données par

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \cos(\theta) \\ y = 1 + \sqrt{2} \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in]-\pi; \pi] \text{ (ou } \mathbb{R} \text{)}.$$

2.6 Soient d_1 la médiatrice de $[AB]$, d_2 celle de $[BC]$. Puisque $\Omega A = \Omega B = \Omega C$, on en déduit que Ω est équidistant de A et B et donc $\Omega \in d_1$. De même $\Omega \in d_2$.

Le cercle recherché est le cercle circonscrit dont le centre se trouve être l'intersection des trois médiatrices. Soient I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. On a $I(5/2, 5/2)$ et $J(-1, 11/2)$. $\overrightarrow{AB}(3, 1)$ est un vecteur normal à d_1 . Donc pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} M \in d_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{IM} | \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x - \frac{5}{2} \\ y - \frac{5}{2} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - \frac{15}{2} + y - \frac{5}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + y = 10. \end{aligned}$$

Donc

$$d_1 : 3x + y = 10.$$

De même, $\overrightarrow{BC}(-10, 5)$ ou encore $\vec{n}(-2, 1)$ est un vecteur normal à d_2 : pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} M \in d_2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \perp \vec{n} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{JM} | \vec{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x+1 \\ y - \frac{11}{2} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x - 2 + y - \frac{11}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + y = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$d_2 : -2x + y = \frac{15}{2}.$$

Soit (a, b) les coordonnées de Ω . Puisque $\Omega \in d_1 \cap d_2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3a + b = 10 \\ -2a + b = \frac{15}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 10 \\ -5a = -\frac{5}{2} \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 10 - 3a = 10 - \frac{3}{2} = \frac{17}{2} \\ a = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\Omega(1/2, 17/2)$. Puis le rayon est donné par

$$R = \Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ -13/2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1+169}{4}} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \sqrt{\frac{85}{2}}.$$

Conclusion, le cercle passant par A, B et C

a pour centre $\Omega(1/2, 17/2)$ et rayon $R = \sqrt{\frac{85}{2}}$.

On pense à vérifier que $\Omega B = R = \Omega C$.

$$\Omega B = \|\overrightarrow{\Omega B}\| = \left\| \begin{bmatrix} 7/2 \\ -11/2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{49+121}{4}} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \sqrt{\frac{85}{2}} = R \text{ OK!}$$

$$\Omega C = \|\overrightarrow{\Omega C}\| = \left\| \begin{bmatrix} -13/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{169+1}{4}} = \sqrt{\frac{170}{4}} = \sqrt{\frac{85}{2}} = R \text{ OK!}$$

3. Projeté orthogonal.

3.1 Soient $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $M(-7, 18)$. D'après ses équations paramétriques, $A(5, 2)$ est un point de \mathcal{D} et $\vec{u} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} . Alors, $\vec{n} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ est normal à \vec{u} et donc à \mathcal{D} . Dès lors,

$$\begin{aligned} d(M, \mathcal{D}) &= \left\| p_{\vec{n}}(\overrightarrow{MA}) \right\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 12 \\ -16 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} (36 - 16) \\ &= 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$d(M, \mathcal{D}) = 2\sqrt{10}.$

Méthode 1. On en déduit donc que

$$H = M \pm d(M, \mathcal{D}) \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \begin{bmatrix} -7 \\ 18 \end{bmatrix} \pm \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 18 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -13 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Or (par exemple, on pouvait aussi chercher le point tel que \overrightarrow{HM} et normal à \vec{u} ou colinéaire à \vec{n})

$$H \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = 0.$$

Si $H(-1, 20)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 18 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0.$$

Donc $(-1, 20) \in \mathcal{D}$. Si $H(-13, 16)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} -18 & 14 \\ -18 & 3 \end{vmatrix} = -18 \times 3 + 14 \times 18 = 18(14 - 3) = 18 \times 11 \neq 0.$$

donc $(-13, 16) \notin \mathcal{D}$. Conclusion,

$$\boxed{H \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}}.$$

Méthode 2. Comme $A \in \mathcal{D}$ et que \vec{u} est un vecteur directeur de \mathcal{D} :

$$H = A + \frac{\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\langle \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle}{9 + 1} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{12 + 48}{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{H \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}}.$$

3.2 Soient $A(0, 1)$, $B(3, -1)$ et $M(3, 12)$ trois points du plan. Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) . On remarque alors que $\vec{n} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à \vec{u} . Ainsi,

$$\begin{aligned} d(M, (AB)) &= \left\| p_{\vec{n}}(\overrightarrow{MA}) \right\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} (6 + 33) \\ &= 3\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d(M, (AB)) = 3\sqrt{13}}.$$

Méthode 1. De là, on en déduit également que

$$H = M \pm \frac{d(M, (AB))}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} \pm \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Or (par exemple, on pouvait aussi chercher le point tel que \overrightarrow{HM} et normal à \vec{u} ou colinéaire à \vec{n})

$$H \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = 0.$$

Si $H(9, 21)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 20 & -2 \end{vmatrix} = -18 - 60 \neq 0.$$

Donc $(9, 21) \notin (AB)$. Si $H(-3, 3)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

donc $(-3, 3) \notin (AB)$. Conclusion,

$$\boxed{H \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}}.$$

Méthode 2. On a

$$H = A + \frac{\langle \overrightarrow{AM} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{9-22}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$H \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3.3 Soient $A(0, 1)$, $B(3, 1)$ et $M(4, -1)$ trois points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou encore $\vec{u} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) . On remarque alors que $\vec{n} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à \vec{u} . Ainsi,

$$\begin{aligned} d(M, (AB)) &= \left\| p_{\vec{n}}(\overrightarrow{MA}) \right\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$d(M, (AB)) = 2.$$

Méthode 1. De là, on en déduit également que

$$H = M \pm \frac{d(M, (AB))}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \pm 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Or (par exemple, on pouvait aussi chercher le point tel que \overrightarrow{HM} et normal à \vec{u} ou colinéaire à \vec{n})

$$H \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AH} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = 0.$$

Si $H(4, 1)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc $(4, 1) \in (AB)$. Si $H(4, -3)$,

$$\det(\overrightarrow{AH}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

donc $(4, -3) \notin (AB)$. Conclusion,

$$H \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Méthode 2. On a

$$H = A + \frac{\langle \overrightarrow{AM} | \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$H \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.4 On note que $\vec{n}_1(2, 1)$ est un vecteur normal à d_1 et $\vec{n}_2(2, 1)$ un vecteur normal à d_2 . Puisque $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}$,

les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

Pour déterminer la distance de d_1 à d_2 , il suffit de prendre un point d'une des droites et de chercher sa distance à l'autre droite. On observe par exemple que $M(2, 1)$ est un point de d_1 (car $2 \times 2 + 1 = 5$). Calculons la distance de M à d_2 . On observe que $A(-1, 0)$ est un point de d_2 et $\vec{n}(2, 1)$ un vecteur normal à d_2 . Donc

$$\begin{aligned} d(M, d_2) &= \left\| p_{\vec{n}}(\overrightarrow{MA}) \right\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{MA} \middle| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{7}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{7\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion, d la distance entre d_1 et d_2 est donnée par

$$d = \frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

3.5 Soient $d_1 : 3x - 4y + 4 = 0$ et $d_2 : 12x + 5y - 5 = 0$ et $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M, d_1) = d(M, d_2)\}$. On observe que $\vec{n}_1(3, -4)$ est un vecteur normal à d_1 et $\vec{n}_2(12, 5)$ à d_2 . On observe également que $A(0, 1)$ est un point à la fois de d_1 et à la fois de d_2 (c'est le point d'intersection des deux droites). Soit $M(x, y)$. On a alors

$$\begin{aligned} d(M, d_1) &= \left\| \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} \right\rangle \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y - 1 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{9 + 16}} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{5} |3x - 4y + 4|. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} d(M, d_2) &= \left\| \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|} \right\rangle \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y - 1 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{144 + 25}} \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{13} |12x + 5y - 5|. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow \frac{1}{5} |3x - 4y + 4| = \frac{1}{13} |12x + 5y - 5| \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{5} (3x - 4y + 4) = \frac{1}{13} (12x + 5y - 5) \quad \text{OU} \quad \frac{1}{5} (3x - 4y + 4) = -\frac{1}{13} (12x + 5y - 5) \\ &\Leftrightarrow 39x - 52y + 52 = 60x + 25y - 25 \quad \text{OU} \quad 39x - 52y + 52 = -60x - 25y + 25 \\ &\Leftrightarrow 21x + 77y = 77 \quad \text{OU} \quad 99x - 27y = -27 \\ &\Leftrightarrow 3x + 11y = 11 \quad \text{OU} \quad 11x - 3y = -3. \end{aligned}$$

Posons $d_3 : 3x + 11y = 11$ et $d_4 : 11x - 3y = -3$. On observe bien que \mathcal{E} est l'union de d_3 et d_4 . Le vecteur $\vec{n}_3(3, 11)$ est normal à d_3 et $\vec{n}_4(11, -3)$ à d_4 . Puisque

$$\langle \vec{n}_3 | \vec{n}_4 \rangle = 33 - 33 = 0,$$

on en déduit que n_3 et n_4 sont orthogonaux et donc d_3 et d_4 sont bien perpendiculaires. Conclusion,

\mathcal{E} est l'union de deux droites d_3 et d_4 perpendiculaires entre elles.

De plus, on peut observer que $A(0, 1)$ appartient à d_3 et d_4 . Toutes ces droites sont bien concourantes en A . Les droites d_3 et d_4 sont les bissectrices de d_1 et d_2 .

4. Intersection.

4.1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 = 2^2.$$

Donc \mathcal{C} est le cercle de centre $\Omega(1, 2)$ et de rayon $R = 2$. De la même façon, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 - 7 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9 = 3^2.$$

Donc \mathcal{C}' est le cercle de centre $\Omega'(-1, 1)$ et de rayon $R' = 3$. On observe alors que

$$\Omega\Omega' = \left\| \overrightarrow{\Omega\Omega'} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

D'autre part, $R + R' = 3 + 2 = 5$ et $|R - R'| = 3 - 2 = 1$. Donc

$$|R - R'| = 1 < \Omega\Omega' < 5 = R + R'.$$

Conclusion, les deux cercles se coupent en deux points distincts.

4.2 Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \\ x + 3y + 11 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 3x - y + 8 = 0 \\ x + 3y + 11 = 0 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 8y + 20 = 0 \\ 6y + 15 = 0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 = 0 \\ y = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 4 = -\frac{7}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve donc bien un point d'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 = \{(-7/2; -5/2)\}$. Donc

les trois droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont concourantes. De plus $\vec{n}_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{D}_1 et $\vec{n}_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

est un vecteur normal à \mathcal{D}_3 . Or $\langle \vec{n}_1 | \vec{n}_3 \rangle = 3 \times 1 - 1 \times 3 = 0$. Donc \vec{n}_1 et \vec{n}_3 sont orthogonaux donc

\mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_3 sont perpendiculaires.

4.3 Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0$ et $M(-2, 0) \in \mathcal{C}$.

NB : on a bien $M \in \mathcal{C}$ car $(-2)^2 + 4 \times (-2) + 4 = 0$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9 = 3^2.$$

Donc \mathcal{C} est le cercle de centre $\Omega(-2, -3)$ et de rayon $R = 3$. Alors le vecteur $\overrightarrow{\Omega M} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal

à \mathcal{T} la tangente à \mathcal{C} au point M . Soit $N(x, y) \in \mathcal{T}$. On a

$$N \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{MN} | \overrightarrow{\Omega M} \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x + 2 \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 3y = 0.$$

Conclusion,

$y = 0$ est une équation cartésienne de \mathcal{T} la tangente à \mathcal{C} au point M .

4.4 Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-x - 1)^2 + \frac{5}{2}x + 2(-x - 1) + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{2}x - 2x - 2 + 2 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à $2x^2 + 5x + 2$. On a $\Delta = \frac{25}{4} - 8 = -\frac{7}{4} < 0$ Nous n'avons donc aucune solution. L'ensemble des points d'intersection est vide.

Autre méthode : On pouvait le voir en calculant le centre du cercle, son rayon, puis la distance du centre du cercle à la droite \mathcal{D} et en vérifiant que cette distance est strictement plus grande que le rayon du cercle : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + 2y + 2 = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + (y + 1)^2 - 1 + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2
 \end{aligned}$$

Donc \mathcal{C} est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{5}{4}, -1\right)$ et de rayon $R = \frac{3}{4}$. Le vecteur $\vec{n}(1, 1)$ est un vecteur normal à \mathcal{D} , d'équation $x + y + 1 = 0$ donc

$$d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{\left|-\frac{5}{4} - 1 + 1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

Donc $d(\Omega, \mathcal{D})^2 = \frac{25}{32} > \frac{18}{32} = \frac{9}{16} = R^2$. Donc $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$ et on conclut

La droite \mathcal{D} et le cercle \mathcal{C} ne s'intersectent pas.

NB : cette méthode ne retourne que le nombre de points d'intersection mais ne calcule pas leurs coordonnées lorsque ces points existent. D'autre part, on note que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -1)$ est un vecteur directeur de (AB) . Donc $\vec{n}(1, 1)$ est un vecteur normal à (AB) . Pour $M(x, y)$, on a

$$\begin{aligned}
 M \in (AB) &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow x - 1 + y - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x + y = 2.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{C} \cap (AB) &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ x+y = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = 2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (2-x-2)^2 = 1 \\ y = 2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + x^2 = 1 \\ y = 2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x = 0 \\ y = 2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = 2-x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow M(1,1) \quad \text{OU} \quad M(0,2).
 \end{aligned}$$

Conclusion, \mathcal{I} l'intersection du cercle \mathcal{C} et de la droite (AB) est constitué de deux points :

$$\mathcal{I} = \{(1,1); (0,2)\}.$$

On peut vérifier que ces deux points vérifient l'équation de (AB) et de \mathcal{C} .

5. Montrer qu'une application est un produit scalaire.

5.1 Soit $E = \mathcal{C}^1([0;1])$. Pour tout $(f, g) \in E^2$, f, g, f' et g' sont continues sur $[0;1]$ donc $fg + f'g'$ également. Donc $\varphi(f, g)$ pour tout $(f, g) \in E^2$. Donc φ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans \mathbb{R} . De plus, pour tout $(f, g, h) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (symétrie)

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt = \int_0^1 (g(t)f(t) + g'(t)f'(t)) dt = \varphi(g, f).$$

- (bilinéarité)

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda f + \mu h, g) &= \int_0^1 ((\lambda f(t) + \mu h(t))g(t) + (\lambda f + \mu h)'(t)g'(t)) dt \\
 &= \int_0^1 (\lambda f(t)g(t) + \mu h(t)g(t) + \lambda f'(t)g'(t) + \mu h'(t)g'(t)) dt \\
 &= \lambda \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt + \mu \int_0^1 (h(t)g(t) + h'(t)g'(t)) dt \\
 &= \lambda \varphi(f, g) + \mu \varphi(h, g).
 \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (positive)

$$\varphi(f, f) = \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt$$

Pour tout $t \in [0;1]$, $f(t)^2 + f'(t)^2 \geq 0$. Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(f, f) \geq 0.$$

- (définie) Supposons $\varphi(f, f) = 0$. La fonction $t \mapsto f(t)^2 + f'(t)^2$ est **continue** sur $[0,1]$, **positive**, **d'intégrale nulle**. Donc par le principe de séparation de l'intégrale, $\forall t \in [0;1]$, $f(t)^2 + f'(t)^2 = 0$. Or la somme de deux réels positifs est nulle si les deux réels sont nuls :

$$\forall t \in [0;1] \begin{cases} f(t) = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow f = 0_E.$$

Conclusion,

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathcal{C}^1([0; 1]).$$

5.2 Soit $E = \mathbb{C}$ vu en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel. La fonction φ est bien définie sur \mathbb{C}^2 et renvoie bien un réel. De plus, pour tout $(z, z', z'') \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (*symétrie*)

$$\begin{aligned} \varphi(z, z') &= \operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(\overline{zz'}) && \text{car } \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(\bar{a}) \\ &= \operatorname{Re}(\bar{z}z') \\ &= \operatorname{Re}(z'\bar{z}) && = \varphi(z', z). \end{aligned}$$

- (*bilinéarité*)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda z + \mu z', z'') &= \operatorname{Re}((\lambda z + \mu z')\overline{z''}) \\ &= \operatorname{Re}(\lambda z\overline{z''} + \mu z'\overline{z''}) \\ &= \lambda \operatorname{Re}(z\overline{z''}) + \mu \operatorname{Re}(z'\overline{z''}) && \text{car } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \\ &= \lambda \varphi(z, z'') + \mu \varphi(z', z''). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (*positive*)

$$\varphi(z, z) = \operatorname{Re}(z\bar{z}) = \operatorname{Re}(|z|^2) = |z|^2 \quad \text{car } |z|^2 \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\varphi(z, z) \geq 0.$$

- (*définie*) Supposons $\varphi(z, z) = 0$. Par ce qui précède, on a alors $|z|^2 = 0$ i.e. $z = 0$.

Conclusion,

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{C}.$$

5.3 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $t \mapsto P(t)$ et $t \mapsto Q(t)$ sont deux fonctions continues sur $[0; 1]$ en tant que fonction polynomiale. Donc $t \mapsto t^n P(t)Q(t)$ aussi et donc $\varphi(P, Q) = \int_0^1 t^n P(t)Q(t) dt$. Ceci étant vrai pour tout $(P, Q) \in E^2$, on en déduit que φ est bien définie sur E^2 et renvoie bien un réel. De plus, pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (*symétrie*)

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 t^n P(t)Q(t) dt = \int_0^1 t^n Q(t)P(t) dt = \varphi(Q, P).$$

- (*bilinéarité*)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \int_0^1 t^n (\lambda P(t) + \mu Q(t)) R(t) dt \\ &= \lambda \int_0^1 t^n P(t)R(t) dt + \mu \int_0^1 t^n Q(t)R(t) dt && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda \varphi(P, R) + \mu \varphi(Q, R). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (*positive*)

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 t^n P(t)^2 dt$$

Pour tout $t \in [0; 1]$, $P(t)^2 \geq 0$ et $t^n \geq 0$ car $t \geq 0$. Donc pour tout $t \in [0; 1]$, $t^n P(t)^2 \geq 0$. Par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\varphi(P, P) \geq 0.$$

- (*définie*) Supposons $\varphi(P, P) = 0$. La fonction $t \mapsto t^n P(t)^2$ est **continue** sur $[0, 1]$, **positive**, **d'intégrale nulle**. Donc par le principe de séparation de l'intégrale, $\forall t \in [0; 1]$, $t^n P(t)^2 = 0$. Or pour tout $t \in]0; 1]$, $t^n \neq 0$, donc $\forall t \in]0; 1]$, $P(t) = 0$. Donc le polynôme P possède une infinité de racines. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}[X].}$$

5.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_i > 0$. Pour tout $(X, Y) \in E^2$, $X^T \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc $X^T D Y$ et appartient à $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ i.e. est un réel. Donc φ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans \mathbb{R} . De plus, pour tout $(X, Y, Z) \in E^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (*symétrie*) $\varphi(X, Y) = X^T D Y$. Puisque $X^T D Y \in \mathbb{R}$, $X^T D Y = (X^T D Y)^T$. Par propriété,

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y) &= X^T D Y = (X^T D Y)^T \\ &= Y^T D^T (X^T)^T \\ &= Y^T D X \quad \text{car } D \text{ est symétrique car diagonale} \quad = \varphi(Y, X). \end{aligned}$$

- (*bilinéarité*)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda X + \mu Y, Z) &= (\lambda X + \mu Y)^T D Z \\ &= (\lambda X^T + \mu Y^T) D Z \quad \text{par linéarité de la transposée} \\ &= \lambda X^T D Z + \mu Y^T D Z \\ &= \lambda \varphi(X, Z) + \mu \varphi(Y, Z). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (*positive*)

$$\varphi(X, X) = X^T D X.$$

Notons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \varphi(X, X) &= [x_1 \quad \dots \quad x_n] \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_1 x_1 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{bmatrix} \\ &= a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_i > 0$, donc $a_i x_i^2 \geq 0$ et donc

$$\varphi(X, X) \geq 0.$$

- (*définie*) Supposons $\varphi(X, X) = 0$. Par ce qui précède, on a $\sum_{k=1}^n a_k x_k^2 = 0$. Puisque pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_k x_k^2 \geq 0$, on en déduit que nécessairement,

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad a_k x_k^2 = 0.$$

Or pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_k > 0$. Donc $x_k = 0$ et finalement $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}^n.}$$

5.5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. La fonction φ est bien définie sur E^2 et est bien à valeurs dans \mathbb{R} . De plus, pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

- (*symétrie*)

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(k) P^{(k)}(k) = \varphi(Q, P).$$

- (bilinéarité)

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda P + \mu Q, R) &= \sum_{k=0}^n (\lambda P + \mu Q)^{(k)}(k) R^{(k)}(k) \\
 &= \lambda \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) R^{(k)}(k) + \mu \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(k) R^{(k)}(k) \\
 &= \lambda \varphi(P, R) + \mu \varphi(Q, R).
 \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche. Par symétrie, φ est aussi linéaire à droite.

- (positive)

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^n \left(P^{(k)}(k) \right)^2.$$

En tant que somme de termes positifs,

$$\varphi(P, P) \geq 0.$$

- (définie) Supposons $\varphi(P, P) = 0$ alors $\sum_{k=0}^n \left(P^{(k)}(k) \right)^2 = 0$. Puisque les termes sont positifs,

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P^{(k)}(k) = 0.$$

Puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P^{(n)} \in \mathbb{R}_0[X]$ est constant (éventuellement nul). Or $P^{(n)}(n) = 0$. Donc $P^{(n)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $P^{(n-1)}$ est constant. Or $P^{(n-1)}(n-1) = 0$ donc $P^{(n-1)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Par récurrence, on en déduit que $P^{(0)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On peut aussi procéder par l'absurde. Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Soit d son degré et a_d son coefficient dominant. Dès lors, $P^{(d)} = d!a_d$. Puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $d \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Donc $P^{(d)}(d) = 0$. D'où $d!a_d = 0$ impossible. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Conclusion,

φ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.
