Correction de l'interrogation 2 d'entrainement
Fonctions réelles

1. **Restituer le cours.**

1.1 Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq \mathbb{R}$.

- L'image directe de A par f est
$$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}.$$
- L'image réciproque de B par f est
$$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in U \mid f(x) \in B \}.$$

1.2 A partir du graphe de f, on obtient le graphe de

- g_1 par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- g_2 par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- g_3 par une dilatation/contraction verticale de coefficient a.
- g_4 par une dilatation/contraction horizontale de coefficient $\frac{1}{a}$.

1.3 Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.
La fonction f est paire si

- U est centré en 0 : $\forall x \in U,\ -x \in U$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.

Le graphe de f est alors symétrique par rapport à (Oy).
La fonction f est impaire si

- U est centré en 0 : $\forall x \in U,\ -x \in U$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.

Le graphe de f est alors symétrique par rapport à $(0, 0)$.

1.4 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est croissante sur I si
$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad [(x \leqslant y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) \leqslant f(y))].$$
f est strictement décroissante sur I si
$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad [(x < y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) > f(y))].$$

1.5 Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :
$$\begin{aligned}
f \text{ est majorée sur } U \quad &\Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in U, \quad f(x) \leqslant M \\
f \text{ est minorée sur } U \quad &\Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in U, \quad m \leqslant f(x) \\
f \text{ est bornée sur } U \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in U, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M \\
&\Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in U, \quad |f(x)| \leqslant M.
\end{aligned}$$

1.6 Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On a
$$f \text{ continue en } a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe et vaut } f(a).$$

1.7 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{F}([a; b], \mathbb{R})$. Si f est continue sur $[a; b]$ alors,
$$\forall \lambda \in [f(a); f(b)], (\text{ ou } [f(b); f(a)]),\ \exists c \in [a; b], \qquad f(c) = \lambda.$$

1.8 Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On a
$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
En particulier
$$(\ f \text{ dérivable en } a\ ) \quad \Rightarrow \quad (\ f \text{ continue en } a\ ).$$

2. **Déterminer l'ensemble de définition et la parité d'une fonction.**

2.1 Soit $f : x \mapsto \frac{2\ln(x^2-5)}{\tan(3x)}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{D}_f \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan(3x) \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 > 5 \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ 3x \neq k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > \sqrt{5} \quad \text{OU} \quad x < -\sqrt{5} \\ \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ 3x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > \sqrt{5} \quad \text{OU} \quad x < -\sqrt{5} \\ \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\frac{\pi}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble de définition de f est

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \left]-\infty\,;\,-\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5}\,;\,+\infty\right[\setminus \left\{ k\frac{\pi}{6} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

(i) On note que $\mathscr{D}_f$ est centré en 0 : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f$.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(-x) = \frac{2\ln\left((-x)^2 - 5\right)}{\tan(3(-x))} &= \frac{2\ln\left(x^2-5\right)}{-\tan(3x)} \qquad \text{car la fonction tangente est impaire.} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

2.2 Soit $f : x \mapsto \frac{7x^3-3x+1}{x^4+x^2+1}$. Soit Δ le discriminant de $X^2 + X + 1$. On a $\Delta = 1 - 4 < 0$. Donc pour tout $u \in \mathbb{R}$, $u^2 + u + 1 > 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, (en prenant $u = x^2$), on a $x^4 + x^2 + 1 > 0$. Par conséquent $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

(i) On note que $\mathbb{R}$ est bien centré en 0 : $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$.

(ii) Cependant on a $f(1) = \frac{7-3+1}{1+1+1} = \frac{5}{3}$ et $f(-1) = \frac{-7+3+1}{1+1+1} = -1$. Donc $f(-1) \neq -f(1)$ et la fonction f n'est pas impaire et $f(-1) \neq f(1)$ donc la fonction f n'est pas paire.

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

2.3 Soit $f : x \mapsto \frac{e^{3x^3+1} + e^{-3x^3+1}}{\sin(2x)}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. On a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ 2x \neq k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

(i) On note que $\mathscr{D}_f$ est centré en 0 : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f$.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(-x) = \frac{e^{3(-x)^3+1} + e^{-3(-x)^3+1}}{\sin(-2x)} &= \frac{e^{-3x^3+1} + e^{3x^3+1}}{-\sin(2x)} \qquad \text{car la fonction sinus est impaire} \\ &= -\frac{e^{3x^3+1} + e^{-3x^3+1}}{\sin(2x)} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

2.4 Soit $f : x \mapsto \frac{3|x|^3+\cos(6x)}{\cos(2x)}$. Soit $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

(i) On note que $\mathscr{D}_f$ est centré en 0 : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f$.

(ii) De plus pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(-x) = \frac{3|-x|^3 + \cos(-6x)}{\cos(-2x)} &= \frac{3|x|^3 + \cos(6x)}{\cos(2x)} \qquad \text{car la fonction cosinus est paire} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$$

2.5 Soit $f : x \mapsto \ln(|x+2| - (x+3))$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de f. On a

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| - (x+3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| > x+3.$$

Premier cas, $x \geqslant -2$, alors

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad x+2 > x+3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 > 3 \quad \text{impossible.}$$

Second cas, $x \leqslant -2$, alors

$$x \in \mathscr{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad -x-2 > x+3 \quad \Leftrightarrow \quad -5 > 2x \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{5}{2}.$$

Or $-\frac{5}{2} < -2$.
Conclusion, l'ensemble de définition de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \left]-\infty\,;\, -\frac{5}{2}\right[.}$$

On note que $\mathscr{D}_f$ n'est pas centré en 0 (pire ne contient aucun réel positif) il n'y a donc aucune chance que f soit paire ou impaire. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

3. **Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection.**

3.1 Pour tout $x \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $f(x) = \sin(4x) + 5x^2$.

(i) La fonction f est continue sur $\left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que somme de fonctions continues.

(ii) Si $x = 0$, $f(0) = 0 < 2$ et si $x = \frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(2\pi) + 5\frac{\pi^2}{4} = 5\frac{\pi^2}{4} > 5\frac{3^2}{4} > 5\frac{2^2}{4} = 5 > 2$. Donc $2 \in \left[f(0)\,;\, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f(c) = 2$.

$$\boxed{\text{Conclusion, l'équation } \sin(4x) + 5x^2 = 2 \text{ admet (au moins) une solution sur } \left[0\,;\, \tfrac{\pi}{2}\right].}$$

3.2 Pour tout $x \in [0\,;\, +\infty[$, on pose $f(x) = \left(\frac{1}{5\sqrt{x}+3}\right)^2$ (bien défini car $x \geqslant 0$ et $5\sqrt{x} + 3 \geqslant 3 > 0$).

(i) La fonction f est continue sur $[0\,;\, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas.

(ii) Si $x = 0$, $f(0) = \frac{1}{9} > \frac{1}{10}$ et si $x = 1$ (par exemple), $f(1) = \frac{1}{64} < \frac{1}{10}$. Donc $\frac{1}{10} \in [f(1)\,;\, f(0)]$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0\,;\,1] \subseteq [0\,;\,+\infty[$ tel que $f(c) = \frac{1}{10}$.

$$\boxed{\text{Conclusion, l'équation } \left(\frac{1}{5\sqrt{x}+3}\right)^2 = \frac{1}{10} \text{ admet (au moins) une solution sur } [0\,;\,+\infty[.}$$

3.3 Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} = \mathbb{R} \setminus \{\, k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on pose $f(x) = 4\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

(i) La fonction f est continue sur $[0\,;\,\pi[$ en tant que composée de fonctions continues.

(ii) Si $x = 0$, $f(0) = 0 < 3000$ et si $x \to \pi$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} f(x) = +\infty$. Donc il existe $x_0 \in [0\,;\,\pi[$ tel que pour tout $x \in [x_0\,;\,\pi[$, $f(x) \geqslant 3000$, notamment si $x = x_0$, $f(x_0) \geqslant 3000$ (attention nous n'avons pas montré que $f(x_0) = 3000$ faites bien la distinction). Ainsi $3000 \in [f(0)\,;\,f(x_0)]$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0\,;\,x_0] \subseteq [0\,;\,\pi[\subseteq [0\,;\,+\infty[$ tel que $f(c) = 3000$.

$$\boxed{\text{Conclusion, l'équation } 4\tan\left(\tfrac{x}{2}\right) = 3000 \text{ admet (au moins) une solution sur } [0\,;\,+\infty[.}$$

En réalité cette équation va admettre une infinité de solutions sur $[0\,;\,+\infty[$ par la π-périodicité de la fonction tangente mais une seule sur $[0\,;\,\pi[$ en appliquant le théorème de la bijection.

3.4 L'unicité demandée réclame le théorème de la bijection et non juste le théorème des valeurs intermédiaires. Pour tout $x \in [3\,;\,+\infty[$, on pose $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1}$ qui est bien défini car pour tout $x \geqslant 3$, $x^2-1 \geqslant 8 > 0$. De plus la fonction f est dérivable sur $[3\,;\,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall x \in [3\,;\,+\infty[\,, \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x\left(x^2-1\right) - \mathrm{e}^x\,(2x)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^x\left(x^2-2x-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Soit Δ le discriminant de X^2-2X-1, $\Delta = 4+4 = 8 > 0$, donc les solutions réelles de l'équation $x^2-2x-1 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2}$$

Or $x_1 < x_2 < \frac{2+3}{2} < 3$. Donc pour tout $x \in [3\,;\,+\infty[$, $x^2-2x-1 > 0$ et par suite,

$$\forall x \in [3\,;\,+\infty[\,, \qquad f'(x) > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[3\,;\,+\infty[$. De plus $f(3) = \frac{\mathrm{e}^3}{8}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	3	$+\infty$
f	$\frac{\mathrm{e}^3}{8}$	$\nearrow$ $+\infty$

(i) La fonction f est continue sur $[3\,;\,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

(ii) Si $x = 3$, $f(3) = \frac{\mathrm{e}^3}{8} < \frac{3^3}{8} = \frac{27}{8} < 4$ donc $4 \in \left[\frac{\mathrm{e}^3}{8}\,;\,+\infty\right[= [f(3)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f(x)[$.

(iii) La fonction f est strictement croissante sur $[3\,;\,+\infty[$

Donc par le théorème de la bijection, il existe un unique $c \in [3\,;\,+\infty[$ tel que $f(c) = 4$.

$$\boxed{\text{Conclusion, l'équation } \frac{\mathrm{e}^x}{x^2-1} = 4 \text{ admet une unique solution sur } [3\,;\,+\infty[.}$$

3.5 Pour tout $x > 0$, on pose $u(x) = x - \ln(x)$. La fonction u est bien définie, continue et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Donc pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $u'(x) < 0$ et pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$, $u'(x) > 0$ et la fonction u est donc strictement décroissante sur $]0\,;\,1[$ et strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} u(x) = +\infty$, $u(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}) = +\infty$. Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
u	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u(x) \geqslant 1 > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, \qquad x > \ln(x).}$$

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)}$. Par ce qui précède, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x - \ln(x) \neq 0$ donc f est bien définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et est même continue et dérivable sur cet ensemble et pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\left(x - \ln(x)\right) - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \ln(x)\right)^2} = \frac{x - \ln(x) - \ln(x)\,(x-1)}{x\left(x - \ln(x)\right)^2} = \frac{x - x\ln(x)}{x\left(x - \ln(x)\right)^2} = \frac{1 - \ln(x)}{\left(x - \ln(x)\right)^2}.$$

Or pour tout $x \in [1; \mathrm{e}[$, on a $\ln(x) \in [0;1[$ donc $1 - \ln(x) > 0$ et donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[1; \mathrm{e}]$. De plus, $f(1) = \frac{\ln(1)}{1-\ln(1)} = 0$ et $f(\mathrm{e}) = \frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}-\ln(\mathrm{e})} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$. On a donc

x	1		e
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}-1}$

Or $2 < \mathrm{e} < 3$ donc $0 < \mathrm{e}-1 < 2$ et par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{\mathrm{e}-1} > \frac{1}{2}$.
On a donc les points suivants :

- $f(1) = 0 < \frac{1}{2}$, $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}-1} > \frac{1}{2}$,
- f est continue sur $[1; \mathrm{e}]$,
- f est strictement croissante sur $[1; \mathrm{e}]$.

Donc par le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), on en déduit que

$$\exists! \alpha \in [1; \mathrm{e}], \qquad f(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists! x \in [1; \mathrm{e}], \qquad \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)} = \frac{1}{2}.}$$

4. **Tableau de variations.**

4.1 La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x = x\,(x+2)\,\mathrm{e}^x.$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Or,

$$f(-2) = 4\,\mathrm{e}^{-2}, \qquad f(0) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^x = +\infty.$$

Et, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^x = 0$. Conclusion,

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x}{\ln(x)} \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Donc f est bien définie sur $U =]0;1[\cup]1;+\infty[$. De plus f est dérivable sur U comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \in U, \qquad f'(x) = \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}.$$

Dès lors, pour $x \in U$,

$$f'(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(x) - 1 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(x) > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > \mathrm{e}\,.$$

On obtient donc le tableau :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x}{\ln(x)} = 0.$$

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \ln(x) = 0^-$ donc

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{x}{\ln(x)} = 1 \times -\infty = -\infty.$$

De même,

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{x}{\ln(x)} = 1 \times +\infty = +\infty.$$

Puis, $f(\mathrm{e}) = \frac{\mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e})} = \mathrm{e}$. Finalement, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty.$$

Conclusion,

x	0		1		e		$+\infty$
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

4.3 La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = x^3 + x^2 - 2x = x\left(x^2 + x - 2\right).$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 + x - 2$. On a $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$. Ainsi, les racines associées sont $r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = x\,(x-1)\,(x+2).$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↘		↗		↘		↗	

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 5 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{4}{3x} - \frac{4}{x^2} + \frac{20}{x^4}\right) = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{4}{3x} - \frac{4}{x^2} + \frac{20}{x^4}\right) = +\infty.$$

Mais aussi,

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 + 5 = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3} \\ f(0) &= 5 \\ f(1) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 + 5 = \frac{3+4}{12} + 4 = \frac{1+48}{12} = \frac{49}{12}. \end{aligned}$$

Conclusion,

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	$\frac{7}{3}$	↗	5	↘	$\frac{49}{12}$	↗	$+\infty$

4.4 La fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ donc notamment sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \qquad f'(x) &= 3\left(-\sin(x)\right)\cos^2(x)\sin^3(x) + 3\cos(x)\sin^2(x)\cos^3(x)\\ &= -3\cos^2(x)\sin^4(x) + 3\cos^4(x)\sin^2(x) = 3\cos^2(x)\sin^2(x)\left(-\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)\\ &= 3\cos^2(x)\sin^2(x)\left(\cos(x)-\sin(x)\right)\left(\cos(x)+\sin(x)\right).\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$, $\sin(x) \geqslant 0$. Donc pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(x) - \sin(x) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(x) \geqslant \sin(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Le cosinus étant l'abscisse et le sinus l'ordonnée, l'égalité $\cos(x) = \sin(x)$ *se situe sur la droite d'équation* $y = x$.
Ainsi,

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Or $f(0) = \cos^3(0)\sin^3(0) = 1 \times 0 = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \times 1 = 0$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Conclusion,

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0

4.5 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x^2+3}{x^2-2x-3} \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2-2x-3 \neq 0.$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 - 2x - 3$. On a $\Delta = 4 - 4 \times (-3) = 4(1+3) = 4^2$. Ainsi, les racines associées sont $\frac{2-4}{2} = -1$ et $\frac{2+4}{2} = 3$. Donc sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est définie sur

$$U = [0; 3[\cup]3; +\infty[$$

et

$$\forall x \in U, \qquad f(x) = \frac{x^2+3}{(x+1)(x-3)}.$$

La fonction f est dérivable sur son domaine de définition en tant que quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \in U, \qquad f'(x) = \frac{2x\left(x^2-2x-3\right)-\left(x^2+3\right)(2x-2)}{\left(x^2-2x-3\right)^2}$$
$$= \frac{2x^3-4x^2-6x-2x^3+2x^2-6x+6}{\left(x^2-2x-3\right)^2}$$
$$= \frac{-2x^2-12x+6}{\left(x^2-2x-3\right)^2}$$
$$= -2\frac{x^2+6x-3}{\left(x^2-2x-3\right)^2}.$$

Soit Δ le discriminant de x^2+6x-3. On a $\Delta = 36+12 = 48 = 4\times 12 = 4^2\times 3$. Les racines associées sont donc $r_1 = \frac{-6+4\sqrt{3}}{2} = -3+2\sqrt{3}$ et $r_2 = -3-2\sqrt{3}$.

$$\forall x \in U, \qquad f'(x) = -2\frac{\left(x-2\sqrt{3}+3\right)\left(x+2\sqrt{3}+3\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^2}$$

On note que $r_2 < 0$ et puisque $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4\times 3 = 12 \in]9;16[$, on a $2\sqrt{3} \in]3;4[$, on a donc $r_1 \in]0;1[\subseteq]0;3[$. D'où

x	0		$2\sqrt{3}-3$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Or $f(0) = \frac{3}{-3} = -1$,

$$f\left(2\sqrt{3}-3\right) = \frac{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2+3}{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2-2\left(2\sqrt{3}-3\right)-3}$$
$$= \frac{12-12\sqrt{3}+9+3}{12-12\sqrt{3}+9-4\sqrt{3}+6-3}$$
$$= \frac{24-12\sqrt{3}}{24-16\sqrt{3}}$$
$$= \frac{12\left(2-\sqrt{3}\right)}{8\left(3-2\sqrt{3}\right)}$$
$$= \frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3+2\sqrt{3}\right)}{2\,(9-12)}$$
$$= \frac{3\left(6+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}-6\right)}{-6}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Puis,

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \frac{x^2+3}{(x+1)(x-3)} = \frac{12}{4\times 0^-} = -\infty,$$
$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{x^2+3}{(x+1)(x-3)} = \frac{12}{4\times 0^+} = +\infty.$$

Enfin,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = 1.$$

Conclusion,

x	0		$2\sqrt{3}-3$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

5. **Dérivée n-ième.**

5.1 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

On observe alors que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

La fonction f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}.$$

La fonction f est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n) : « \ f \text{ est } n\text{-fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,\frac{1\times 2\times\cdots\times(n-1)}{x^n} \ ».$$

On rappelle/donne la notation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n! = 1\times 2\times n \qquad \text{et} \qquad 0! = 1.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 1$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad (-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)!}{x^n} = (-1)^2\,\frac{0!}{x} = \frac{1}{x}.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$: f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

La fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est $(n+1)$-fois dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)!}{x^n}\right)' = -n\,(-1)^{n+1}\,\frac{(n-1)!}{x^{n+1}} = (-1)^{n+2}\,\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie : $\boxed{f \text{ est } n\text{-fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}.}$$

De plus pour $n = 0$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(0)}(x) = f(x) = \ln(x).}$$

5.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4x^{3/2}} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8x^{5/2}} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{3\times 5}{16x^{7/2}}. \end{aligned}$$

Posons pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}}}. \text{ »}$$

Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $n = 2$, alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad (-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}}} = (-1)^3\frac{1\times(4-3)}{2^2 x^{\frac{4-1}{2}}} = -\frac{1}{4x^{3/2}}.$$

Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \geqslant 2$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}}}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' &= -\frac{2n-1}{2}\times(-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}-1}} \\ &= (-1)^{n+2}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)\,(2n-1)}{2^{n+1}x^{\frac{2n-3}{2}}}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}\,(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie : $\boxed{f \text{ est } n\text{-fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n-1}{2}}}.}$$

De plus, pour $n = 1$ et $n = 0$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sqrt{x}.}$$

5.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \cos^2(x) - \sin^2(x)$ est n dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence et composée de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)\sin(x) = -4\sin(x)\cos(x) \\ f''(x) &= -4\cos(x)\cos(x) + 4\sin(x)\sin(x) = -4\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) = -4f(x) \\ f'''(x) &= -4f'(x) = 16\sin(x)\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= -4f''(x) = -4\left(-4f(x)\right) = 16f(x) = 16\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right). \end{aligned}$$

Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$ la propriété :

$$« \ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(2p)}(x) = (-4)^p f(x) \text{ et } f^{(2p+1)}(x) = (-4)^p f'(x). \ »$$

Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $p = 0$, alors par ce qui précède, f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(2p)} = f^{(0)} = f = (-4)^0 f = (-4)^p f \qquad \text{et} \qquad f^{(2p+1)} = f' = (-4)^0 f' = (-4)^p f'.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(2p)}(x) = (-4)^p f(x) \text{ et } f^{(2p+1)}(x) = (-4)^p f'(x).$$

Dès lors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(2p+2)}(x) = \left(f^{(2p)}\right)''(x) = (-4)^p f''(x) = (-4)^p (-4) f(x) \qquad \text{par ce qui précède.}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(2p+2)}(x) = (-4)^{p+1} f(x)$. De même,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(2p+3)}(x) = \left(f^{(2p+1)}\right)''(x) = (-4)^p f'''(x) = (-4)^p (-4) f'(x) = (-4)^{p+1} f'(x).$$

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie. Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}}$ et si n est pair, $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(2p)}(x) = (-4)^p \left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right),}$$

et si n est impair, $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(2p+1)}(x) = (-4)^{p+1} \cos(x) \sin(x).}$$

5.4 La fonction f est n fois dérivable comme produit de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \, \mathrm{e}^x \\
f'(x) &= 2x \, \mathrm{e}^x + x^2 \, \mathrm{e}^x = \left(x^2 + 2x\right) \mathrm{e}^x \\
f''(x) &= \left(2x + 2 + x^2 + 2x\right) \mathrm{e}^x = \left(x^2 + 4x + 2\right) \mathrm{e}^x \\
f^{(3)}(x) &= \left(2x + 4 + x^2 + 4x + 2\right) \mathrm{e}^x = \left(x^2 + 6x + 6\right) \mathrm{e}^x \\
f^{(4)}(x) &= \left(2x + 6 + x^2 + 6x + 6\right) \mathrm{e}^x = \left(x^2 + 8x + 12\right) \mathrm{e}^x \\
f^{(5)}(x) &= \left(2x + 8 + x^2 + 8x + 12\right) \mathrm{e}^x = \left(x^2 + 10x + 20\right) \mathrm{e}^x .
\end{aligned}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad « \ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x. \ »$$

Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(0)}(x) = f(x) = x^2 \, \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x = \left(x^2 + 0\right) \mathrm{e}^x = x^2 \, \mathrm{e}^x .$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x .$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\
&= \left(\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x\right)' \\
&= (2x + 2n) \, \mathrm{e}^x + \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x \\
&= \left(x^2 + (2n+2) x + n(2 + n - 1)\right) \mathrm{e}^x \\
&= \left(x^2 + 2(n+1) x + n(n+1)\right) \mathrm{e}^x .
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. La fonction $\boxed{f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x.}$$

5.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto x\cos(x)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(x) - x\sin(x) \\
f''(x) &= -\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x) = -2\sin(x) - x\cos(x) \\
f^{(3)}(x) &= -2\cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) = -3\cos(x) + x\sin(x) \\
f^{(4)}(x) &= 3\sin(x) + \sin(x) + x\cos(x) = 4\sin(x) + x\cos(x).
\end{aligned}$$

Posons pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(p) : \qquad \text{« } f^{(2p)}(x) = (-1)^p \left[(2p)\sin(x) + x\cos(x)\right] \text{ et } f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \left[(2p+1)\cos(x) - x\sin(x)\right]. \text{ »}$$

Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $p = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(2p)}(x) = f(x) = x\cos(x) \qquad \text{et } (-1)^p \left[(2p)\sin(x) + x\cos(x)\right] = (-1)^0 \left[0 \times \sin(x) + x\cos(x)\right] = x\cos(x).$$

Donc $f^{(2p)}(x) = (-1)^p \left[(2p)\sin(x) + x\cos(x)\right]$. De même, par ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(2p+1)}(x) = f'(x) = \cos(x) - x\sin(x) \qquad \text{et } (-1)^p \left[(2p+1)\cos(x) - x\sin(x)\right] = \cos(x) - x\sin(x).$$

Donc $f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \left[(2p+1)\cos(x) - x\sin(x)\right]$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$. Supposons $\mathscr{P}(p)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} f^{(2p)}(x) & = (-1)^p \left[(2p)\sin(x) + x\cos(x)\right] \\ f^{(2p+1)}(x) & = (-1)^p \left[(2p+1)\cos(x) - x\sin(x)\right]. \end{cases}$$

Alors, en dérivant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f^{(2p+2)}(x) = \left(f^{(2p+1)}\right)'(x) &= (-1)^p \left[(2p+1)\cos(x) - x\sin(x)\right]' \\
&= (-1)^p \left[-(2p+1)\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x)\right] \\
&= (-1)^p \left[-(2p+2)\sin(x) - x\cos(x)\right] \\
&= (-1)^{p+1} \left[(2p+2)\sin(x) + x\cos(x)\right].
\end{aligned}$$

En dérivant une seconde fois,

$$\begin{aligned}
f^{(2p+3)}(x) = \left(f^{(2p+2)}\right)'(x) &= (-1)^{p+1} \left[(2p+2)\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)\right] \\
&= (-1)^{p+1} \left[(2p+3)\cos(x) - x\sin(x)\right].
\end{aligned}$$

Ce qui achève de démontrer $\mathscr{P}(p+1)$.
Conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}}$ et si n est pair, $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(2p)}(x) = (-1)^p \left[(2p)\sin(x) + x\cos(x)\right].}$$

Si n est impair, $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \left[(2p+1)\cos(x) - x\sin(x)\right].}$$