

## Interrogation 29 d'entraînement Couple de variables aléatoires

### 1. Restituer le cours.

- 1.1 Définir la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Y = y$ .
- 1.2 Définir l'espérance de  $X$ , la variance de  $X$  (+formule) et la fonction génératrice de  $X$ .
- 1.3 Énoncer le lien entre la fonction génératrice, l'espérance et la variance.
- 1.4 Que dire de l'espérance, la variance et la fonction génératrice de deux variables indépendantes ?
- 1.5 Énoncer le théorème de transfert.
- 1.6 Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- 1.7 Énoncer la propriété sur la somme de deux binomiales.
- 1.8 Pourquoi le/la probabiliste fait un bon époux/épouse ?

### Révisions

- 1.9 Définir une application linéaire.
- 1.10 Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.
- 1.11 Définir et caractériser une projection.
- 1.12 Définir et caractériser une symétrie.
- 1.13 Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.
- 1.14 Définir les termes suivants : isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
- 1.15 Que dire de l'ensemble  $GL(E)$  ?

### 2. Reconnaître une loi usuelle.

- 2.1 On range au hasard 20 chaussettes dans 3 tiroirs.  $X$  est le nombre de chaussettes dans le premier tiroir. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de  $X$ . Quelle est la probabilité que le premier tiroir soit vide ?
- 2.2 On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as cœur.  $X$  est le nombre de cartes que l'on a retournées. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de  $X$ . Quelle est la probabilité d'avoir  $X = 10$  ?
- 2.3 Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos et on note  $X$  le nombre de bosses. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de  $X$ . Quelle est la probabilité d'avoir  $X \leq 1$  ?
- 2.4 On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes avec remise.  $X$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de  $X$ . Quelle est la probabilité d'avoir  $X \geq 3$ .
- 2.5 On considère qu'en moyenne un étudiant sur neuf est gaucher. Dans une classe de 38 étudiants, on sait que 6 personnes font allemand.  $X$  est le nombre de gauchers parmi les germanistes. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de  $X$ . Quelle est la probabilité qu'ils soient tous gauchers ?

### 3. Manipuler un couple de variables aléatoires.

- 3.1 On pioche de façon indépendante deux nombres dans l'ensemble  $\{-1; 1\}$ . On note  $X$  la somme et  $Y$  le produit. Donner la loi conjointe de  $X$  et  $Y$  dans un tableau. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- 3.2 Soit  $a > 0$ . On considère un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  à valeurs dans  $\llbracket 1; n \rrbracket^2$  dont la loi conjointe est donnée pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$  par  $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}$ . Déterminer les lois marginales en fonction de  $a$  (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
- 3.3 Soient  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; 3 \rrbracket)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(3, p)$ . On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes. Donner la loi conjointe de  $(X, Y)$  sous forme de tableau.
- 3.4 Soient  $(p_1, p_2) \in [0; 1]^2$ ,  $X_1 \sim \mathcal{B}(p_1)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{B}(p_2)$  et  $\varepsilon \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ . On pose  $Y = \varepsilon X_1 + (1 - \varepsilon) X_2$ . On suppose  $\varepsilon$  indépendant de  $X_1$  et de  $X_2$ . Déterminer la loi de  $Y$ .
- 3.5 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0; n \rrbracket)$  et  $\varepsilon \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ . On suppose  $X$  et  $\varepsilon$  indépendants. On pose  $Y = (-1)^\varepsilon X$ . Déterminer la loi de  $Y$ .

**4. Espérance et variance.**

- 4.1 Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ . Refaire le calcul de l'espérance et la variance de  $X$  et en déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev associée.
- 4.2 Soit  $p \in [0; 1]$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ .  
 Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$ .
- 4.3 Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $X_n \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$  et  $Y_n = \cos\left(\frac{X_n}{n}\right)$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$ .
- 4.4 Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $X_n \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq p)$ .
- 4.5 Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $X_n$  une variable aléatoire vérifiant pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(X_n = k) = a_n e^{-\sqrt{k}}$  où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite dans  $\mathbb{R}_+^*$  convergeant vers un réel  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(X_n > \frac{n}{10}\right) = 0$ .
- 4.6 Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $X_n \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$  et on pose  $Y_n = \frac{n}{X_n^2}$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon n) = 0$ .

**5. En vrac.**

- 5.1 On se munit d'une pièce retournant pile avec une probabilité  $p \in [0; 1]$ . On lance de façon indépendante  $n$  fois la pièce et on note  $X$  le rang d'apparition du premier pile. On pose  $X = 0$  si sur les  $n$  lancers nous n'avons eu aucun pile. Déterminer  $\mathbb{P}(X = 0)$  puis pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(X = k)$ .
- 5.2 On possède  $N$  urnes. Chaque urne contient  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On pioche successivement et de façon indépendante dans chaque urne. On note  $X$  le plus grand numéro obtenu. Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , calculer  $\mathbb{P}(X \leq k)$  et en déduire la loi de  $X$ .
- 5.3 On note  $S_n$  la valeur d'une action en bourse le jour  $n$ . Au jour 0, on a  $S_0 = 1$  et on suppose que chaque jour la valeur de l'action est multipliée par  $\alpha$  avec une probabilité  $p \in ]0; 1[$  et par  $\beta$  sinon. Ceci indépendamment de la valeur de l'action et des jours précédents. Calculer l'espérance de  $S_{n+1}$  en fonction de celle de  $S_n$  et en déduire l'espérance de  $S_n$ .
- 5.4 A ses heures perdues, Amine joue aux fléchettes et lance de façon indépendante  $n$  fléchettes. Il atteint sa cible avec une probabilité  $p$ . Amine gagne un point à chaque fois qu'il touche la cible. Cédric relève les points mais, peu concentré sur cette tâche inintéressante, il se trompe une fois sur 2 en moyenne et augmente le total de 1. On note  $X$  le nombre de points que retourne Cédric. Exprimer  $X$  comme la somme de deux variables aléatoires de loi classique et en déduire  $\mathbb{E}(X)$ .
- 5.5 Soit  $(X, Y)$  dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant

$Y \backslash X$	0	1	2
-1	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Déterminer la loi et l'espérance de  $Z = XY$ .

- 5.6  $n$  candidats passent un examen. Chaque candidat à la même probabilité  $p \in ]0; 1[$  de réussir. S'il échoue il a la possibilité de passer un rattrapage au cours duquel il a la même probabilité  $p$  de réussir. Quelle est la loi de du nombre de lauréats ?