

Correction de l'interrogation 19 d'entraînement Espaces vectoriels

1. Restituer le cours.

1.1 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel si et seulement si (par définition) :

- $F \subseteq E$
- F est un espace vectoriel.

si et seulement si (par caractérisation) :

- $F \subseteq E$
- $0_E \in F$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda x + \mu y \in F.$

1.2 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$F + G = \{z \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G, z = x + y\}.$$

1.3 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si (par définition)

$$\forall (x, x') \in F^2, \forall (y, y') \in G^2, \quad (x + y = x' + y') \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

si et seulement si (par caractérisation) :

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

1.4 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si (par définition)

$$\forall z \in E, \exists! (x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

si et seulement si (par caractérisation) :

1. $F \cap G = \{0_E\}.$
2. $F + G = E.$

1.5 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On note $n = \deg(P) \in \mathbb{N}^*, a_0, \dots, a_n$ les coefficients de P et $x_1, \dots, x_n$ les racines de P (éventuellement confondues). Alors

$$1. \quad x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad 2. \quad x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

1.6 Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet. Comment je ne l'ai pas défini dans le cours ? C'est quoi un espace préhilbertien ? C'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. C'est quoi un produit scalaire ? C'est une forme bilinéaire définie positive et symétrique. C'est quoi une forme bili... Ok si je vous dit que $\mathbb{R}^3$ est un espace de Hilbert, ça vous va ? D'ailleurs, vous ne saviez pas que $\mathbb{R}^3$ était à Hilbert ? Vous devriez alors en sortir vite fait avant qu'il ne se fâche...

2. Reconnaître un espace vectoriel.

2.1 Posons $x = 1$. Alors $x \in E$ et pourtant $2x = 2 \notin E$. Donc E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion,

$$E = [-1; 1] \text{ n'est pas un espace vectoriel.}$$

2.2 On pose $u = (1, -1)$. On observe que $1^2 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$. Donc $u \in E$. Cependant $v = -u = (-1, 1)$ vérifie $(-1)^2 + 1^3 = 1 + 1 = 2 \neq 0$. Donc $-u \notin E$ et E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^3 = 0\} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}$$

2.3 La somme de deux réels positifs est nulle si et seulement si les deux réels sont nuls. Donc $E = \{(0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$ qui est bien un espace vectoriel. Conclusion,

$$\boxed{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

2.4 Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$. Alors la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien majorée par 1 et donc $u \in E$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2u_n$, alors la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = 2u$ n'est pas majorée par 1. Donc $2u \notin E$ et E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion,

$$\boxed{E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ majorée par } 1\} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

2.5 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

- $E \subseteq \mathbb{R}[X]$ par définition.
- $0_{\mathbb{R}[X]} = (X^2 + 1) 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $X^2 + 1$ divise $0_{\mathbb{R}[X]}$ et $0_{\mathbb{R}[X]} \in E$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in E^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Puisque $P \in E$, $X^2 + 1$ divise P : il existe $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X^2 + 1) P_1$. De même $Q \in E$ donc il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X^2 + 1) Q_1$. Ainsi,

$$R = \lambda P + \mu Q = \lambda (X^2 + 1) P_1 + \mu (X^2 + 1) Q_1 = (\lambda P_1 + \mu Q_1) (X^2 + 1)$$

Donc $X^2 + 1$ divise R et donc $\lambda P + \mu Q = R \in E$, E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et donc

$$\boxed{E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid X^2 + 1 \text{ divise } P\} \text{ est un vectoriel.}}$$

2.6 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

- $E \subseteq \mathbb{C}[X]$ par définition.
- Posons $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $X^3 P^{(3)} = X^3 0_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]} = P (X^2 + 1)$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in E$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Puisque $P \in E$, $X^3 P^{(3)} = P (X^2 + 1)$. De même $Q \in E$ donc $X^3 Q^{(3)} = Q (X^2 + 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} X^3 R^{(3)} &= X^3 (\lambda P^{(3)} + \mu Q^{(3)}) && \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda X^3 P^{(3)} + \mu X^3 Q^{(3)} \\ &= \lambda P (X^2 + 1) + \mu Q (X^2 + 1) && \text{car } P \in E \text{ et } Q \in E \\ &= (\lambda P + \mu Q) \circ (X^2 + 1) \\ &= R (X^2 + 1). \end{aligned}$$

Donc $R = \lambda P + \mu Q \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ et donc

$$\boxed{E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid X^3 P^{(3)} = P (X^2 + 1)\} \text{ est un vectoriel.}}$$

2.7 La fonction nulle n'appartient pas à E . Posons $f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$. Alors $\int_0^1 f(t) dt = 0_{\mathbb{R}} \neq -1 = f(1) - 1$. Conclusion,

$$\boxed{E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = f(1) - 1 \right\} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

2.8 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $E \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Si $M = 0_n$, alors $MN = 0_n N = 0_n = N 0_n = NM$. Donc $0_n \in E$.

- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M_1, M_2) \in E^2$. Posons $M = \lambda M_1 + \mu M_2$. Alors,

$$\begin{aligned} MN &= (\lambda M_1 + \mu M_2) N = \lambda M_1 N + \mu M_2 N = \lambda N M_1 + \mu N M_2 && \text{car } M_1 \in E \text{ et } M_2 \in E \\ &= N (\lambda M_1 + \mu M_2) \\ &= NM. \end{aligned}$$

Donc $M = \lambda M_1 + \mu M_2 \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc

$$E = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM \} \text{ est un espace vectoriel.}$$

2.9 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- $E \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition.
- La fonction nulle $f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est 1-périodique, 2-périodique et même k -périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donc $0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Puisque $f \in E$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que f est k_1 -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + k_1) = f(x).$$

De même $g \in E$, donc il existe $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que g est k_2 -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x + k_2) = g(x).$$

Puisque g est k_2 périodique, alors g est $2k_2$ -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x + 2k_2) = g((x + k_2) + k_2) = g(x + k_2) = g(x).$$

Puis de même g est $3k_2$ -périodique et par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, g est pk_2 -périodique. Notamment g est $k_1 k_2$ -périodique.

De même, f est pk_1 -périodique pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc f est $k_1 k_2$ -périodique.

Posons maintenant $h = \lambda f + \mu g$. Montrons que h est $k_1 k_2$ -périodique. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x + k_1 k_2) &= \lambda f(x + k_1 k_2) + \mu g(x + k_1 k_2) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) && \text{car } f \text{ et } g \text{ sont } k_1 k_2\text{-périodiques.} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Donc h est k -périodique avec $k = k_1 k_2 \in \mathbb{N}^*$. Donc $h = \lambda f + \mu g \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc

$$E = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, f \text{ est } k\text{-périodique} \} \text{ est un espace vectoriel.}$$

2.10 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 0$. Alors $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 0_{\mathbb{R}} = 3 \times 0 + n \times 0 = 3u_{n+1} + nu_n$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in E^2$. Notons $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda (3u_{n+1} + nu_n) + \mu (3v_{n+1} + nv_n) && \text{car } u \in E \text{ et } v \in E \\ &= 3(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + n(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= 3w_{n+1} + nw_n. \end{aligned}$$

Donc $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda u + \mu v \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc

$$E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + nu_n \right\} \text{ est un espace vectoriel.}$$

2.11 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On a $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$. Donc $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in E^2$. Posons $w = \lambda u + \mu v$ et notons $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Puisque $u \in E$ et $v \in E$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n)$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \lambda u_n + \mu v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \lambda o(n) + \mu o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n).$$

Donc $w = \lambda u + \mu v \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et donc

$$E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n) \right\} \text{ est un espace vectoriel.}$$

2.12 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- $E \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition.
- La fonction nulle $f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est bien k -lipschitzienne pour tout $k \in \mathbb{R}_+$. En effet,

$$\forall k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 \leq k|x - y|.$$

Donc $0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in E$.

- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Montrons que $h \in E$. Puisque $f \in E$, alors f est lipschitzienne i.e. il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq a|x - y|.$$

De même $g \in E$ est lipschitzienne, il existe $b \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |g(x) - g(y)| \leq b|x - y|.$$

Alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |h(x) - h(y)| &= |\lambda f(x) + \mu g(x) - (\lambda f(y) + \mu g(y))| \\ &= |\lambda(f(x) - f(y)) + \mu(g(x) - g(y))| \\ &\leq |\lambda(f(x) - f(y))| + |\mu(g(x) - g(y))| && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &= |\lambda| |f(x) - f(y)| + |\mu| |g(x) - g(y)| \\ &\leq |\lambda| a|x - y| + |\mu| b|x - y| && \begin{array}{l} f \text{ est } a\text{-lipschitzienne} \\ g \text{ est } b\text{-lipschitzienne} \end{array} \\ &= (|\lambda| a + |\mu| b) |x - y|. \end{aligned}$$

Posons $c = |\lambda| a + |\mu| b \in \mathbb{R}_+$, alors h est c -lipschitzienne,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |h(x) - h(y)| \leq c|x - y|.$$

Donc $h = \lambda f + \mu g \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc

$$E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{ lipschitzienne} \} \text{ est un espace vectoriel.}$$

2.13 Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Posons également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2$. On observe que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de signe constant. Donc $u \in E$ et $v \in E$. Posons $w = u + v$, $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors la suite $w \notin E$. Donc E n'est pas stable par addition. Conclusion,

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ de signe constant} \} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}$$

2.14 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On a $E \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Si $M = 0_n$, alors $\text{tr}(M) = \text{tr}(0_n) = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $0_n \in E$.
- Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in E^2$. Posons $A = \lambda M + \mu N$. Par linéarité de la trace,

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(\lambda M + \mu N) = \lambda \text{tr}(M) + \mu \text{tr}(N) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \quad \text{car } M \in E \text{ et } N \in E.$$

Donc $A = \lambda M + \mu N \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\} \text{ est un espace vectoriel.}$$

2.15 Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{matrix}$. Alors f est 2-lipschitzienne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |2x - 2y| = 2|x - y|.$$

Donc $f \in E$. Posons maintenant $g = 2f$. Alors on a,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y, \quad |g(x) - g(y)| = |4x - 4y| = 4|x - y| > 2|x - y| \quad \text{car } |x - y| > 0.$$

Donc g n'est pas 2-lipschitzienne. Ainsi $2f \notin E$ et E n'est pas stable par multiplication externe. Conclusion,

$$E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), 2\text{-lipschitzienne}\} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}$$

2.16 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

- On a $E \subseteq \mathbb{C}[X]$ par définition.
- Si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Alors $P'' = P' = P = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Donc $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0_{\mathbb{C}}$. Donc $P = 0_{\mathbb{C}[X]} \in E$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Alors, par linéarité de la dérivation, $R' = \lambda P' + \mu Q'$ et $R'' = \lambda P'' + \mu Q''$. Donc

$$\begin{aligned} R''(1) &= \lambda P''(1) + \mu Q''(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1) = R'(1) && \text{car } P \in E \text{ et } Q \in E \\ &= \lambda P(1) + \mu Q(1) = R(1) && \text{car } P \in E \text{ et } Q \in E. \end{aligned}$$

Ainsi, $R''(1) = R'(1) = R(1)$. Donc $R = \lambda P + \mu Q \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ et donc

$$E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(1) = P'(1) = P''(1)\} \text{ est un espace vectoriel.}$$

3. Déterminer une intersection ou une somme d'espaces vectoriels.

3.1 Soient $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P''(1) = 0\}$. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$P \in F \cap G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P \in F \\ P \in G \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad P'(1) = P''(1) = 0.$$

Posons $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^4$ tel que $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Alors $P' = 3a_3X^2 + 2a_2X + a_1$ et $P'' = 6a_3X + 2a_2$. Donc

$$\begin{aligned} P \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ 6a_3 + 2a_2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\ &&\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_3 - 6a_3 + a_1 = 0 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\ &&\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3a_3 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = a_3(X^3 - 3X^2 + 3X) + a_0 \end{aligned}$$

D'où,

$$F \cap G = \{a_3(X^3 - 3X^2 + 3X) + a_0 \in \mathbb{K}_3[X] \mid (a_3, a_0) \in \mathbb{K}^2\}.$$

Conclusion,

$$F \cap G = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(X^3 - 3X^2 + 3X, 1).$$

3.2 Soient $F = \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} M \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \\ \text{tr}(M) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32} \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32} \\ a_{33} = -a_{11} - a_{22}. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow M = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$F \cap G = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

3.3 Soient $F = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ et $G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \right\}$. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu \\ 2\lambda \\ 3\lambda + \mu \\ 4\lambda \end{bmatrix} \\ \lambda + \mu + 2\lambda + 3\lambda + \mu + 4\lambda = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (\lambda + \mu, 2\lambda, 3\lambda + \mu, 4\lambda) \\ 10\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (\lambda + \mu, 2\lambda, 3\lambda + \mu, 4\lambda) \\ \mu = -5\lambda \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = (\lambda - 5\lambda, 2\lambda, 3\lambda - 5\lambda, 4\lambda) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) = \lambda(-4, 2, -2, 4). \end{aligned}$$

D'où,

$$F \cap G = \{2\lambda(-2, 1, -1, 2) \in \mathbb{R}^4 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Conclusion,

$$F \cap G = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

3.4 Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = f\}$ et $G = \text{Vect}(\text{ch}, \cos)$. Soit (E) l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants : $f'' - f = 0$. L'équation caractéristique associée est $(E_c) : r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont 1 et -1 . Posons $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto e^{-x}$. Donc l'ensemble F des solutions est

$$F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2).$$

Ainsi,

$$F + G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2) + \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\text{ch}, \cos) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2, \text{ch}, \cos).$$

Or on observe que $\text{ch} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ et est donc une combinaison linéaire de f_1 et f_2 . Donc

$$F + G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2, \cos).$$

Or on ne peut écrire aucun de ces vecteurs comme combinaison linéaire des autres (on dit que la famille $(f_1, f_2, \cos)$ est libre ou encore que ces vecteurs ne sont pas coplanaires). Conclusion,

$$F + G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, f_2, \cos).$$

3.5 Soient $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$ et $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$. Soit $(F_c) : r^2 - 5r + 6 = 0$ l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence de F . On remarque que 2 et 3 sont les deux racines de (F_c) . Donc

$$F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Soit $(G_c) : r^2 - r - 2 = 0$ l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence de G . Soit Δ le discriminant associé $\Delta = 1 + 8 = 9$ et donc les racines sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. Donc,

$$G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}) + \text{Vect}_{\mathbb{R}}(((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}}) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}}). \end{aligned}$$

Or $C_4 = C_1$ donc

$$F + G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

On note qu'aucun de ces trois vecteurs n'est combinaison linéaire des autres vecteurs. Conclusion,

$$F + G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (3^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

3.6 Soient $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. On a

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, b = c \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a + d = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_5 - C_6 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 + C_3 \end{array} \end{aligned}$$

car les opérations élémentaires sur les vecteurs ne changent pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$F + G = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

4. Montrer que deux espaces vectoriels sont supplémentaires.

4.1 Soient $F = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ constante sur } \mathbb{R}\}$ et $G = \left\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$.

- Soit $f \in F \cap G$. Alors $f \in F$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$. Donc $\int_0^1 f(t) dt = C \times (1 - 0) = C$. Or $f \in G$, donc

$$0 = \int_0^1 f(t) dt = C.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C = 0$. D'où, $f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ et $F \cap G \subseteq \{0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}$. Or on a également $\{0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\} \subseteq F \cap G$. Donc

$$F \cap G = \{0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}.$$

- *Analyse.* Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f = g + h$, $g \in F$ et $h \in G$. Alors g est constante, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = C + h(x).$$

Puis, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 f(t) dt = C + \int_0^1 h(t) dt = C \quad \text{car } h \in G.$$

Donc $C = \int_0^1 f(t) dt$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - C$.

Synthèse. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $C = \int_0^1 f(t) dt$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = C$. Posons également $h = f - C$. Alors, on a bien

$$(i) \quad f = C + h = g + h$$

$$(ii) \quad g \in F$$

$$(iii) \quad \int_0^1 h(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - C = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = 0 \quad \text{par définition de } C$$

donc $h \in G$.

Ainsi, $f \in F + G$. Donc $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq F + G$. Or on a aussi $F + G \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc

$$F + G = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Conclusion, les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$F \oplus G = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

4.2 Soient $F = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ et $G = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

- Soit $u \in F \cap G$. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$u = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 2\lambda_2 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc $u = 0_{\mathbb{R}^3}$ et ainsi $F \cap G \subseteq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Or on a aussi $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subseteq F \cap G$. D'où

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

- D'autre part,

$$F + G = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) + \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) && C_2 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - 2C_2 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_3 \leftarrow \frac{1}{3}C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ &= \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}. \end{aligned}$$

Donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

Conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$:

$$F \oplus G = \mathbb{R}^3.$$

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $M^T = M$ et $M^T = -M$ et donc $M = -M$ i.e. $M = 0_n$. Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \{0_n\}$. Or on a aussi $\{0_n\} \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}.$$

- C'est un exercice que nous avons déjà vu. Ceux qui se souviennent de la décomposition, peuvent passer la partie analyse.

Analyse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = A + B$ avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors, par linéarité de la transposée,

$$M^T = A^T + B^T = A - B \quad \text{car } A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Donc

$$\begin{cases} M = A + B \\ M^T = A - B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{M+M^T}{2} \\ B = \frac{M-M^T}{2} \end{cases}.$$

Synthèse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A = \frac{M+M^T}{2}$ et $B = \frac{M-M^T}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} (i) \quad A + B &= \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2} = M \\ (ii) \quad A^T &= \frac{M^T + (M^T)^T}{2} = \frac{M^T + M}{2} = A \text{ donc } A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ (iii) \quad B^T &= \frac{M^T - (M^T)^T}{2} = \frac{M^T - M}{2} = -B \text{ donc } B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ainsi, $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Or on a aussi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Donc

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Conclusion, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

4.4 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.

- Soit $P \in F \cap G$. Alors $P(0) = P'(0) = P(1) = P'(1) = 0$. Donc 0 est une racine double de P et 1 est aussi une racine double de P . Donc P est un polynôme de degré au plus 3 ($\in \mathbb{R}_3[X]$) ayant 4 racines comptées avec multiplicité. Ainsi $P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Donc $F \cap G \subseteq \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$. Or on a aussi $\{0_{\mathbb{R}_3[X]}\} \subseteq F \cap G$.
Donc

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}.$$

- Calculons $F + G$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow 0 \text{ est une racine double de } P \\ &\Leftrightarrow X^2 \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = X^2 Q \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = X^2 (aX + b) = aX^3 + bX^2. \end{aligned}$$

D'où

$$F = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2).$$

De même, pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\begin{aligned} P \in G &\Leftrightarrow 1 \text{ est une racine double de } P \\ &\Leftrightarrow (X - 1)^2 \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_1[X], P = (X - 1)^2 Q \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = (X - 1)^2 (aX + b) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = (X^2 - 2X + 1)(aX + b) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = a(X^3 - 2X^2 + X) + b(X^2 - 2X + 1). \end{aligned}$$

D'où

$$G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3 - 2X^2 + X, X^2 - 2X + 1).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2) + \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3 - 2X^2 + X, X^2 - 2X + 1) \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2, X^3 - 2X^2 + X, X^2 - 2X + 1). \end{aligned}$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2, X, -2X + 1) & C_3 &\leftarrow C_3 - C_1 + 2C_2 \\ &= \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3, X^2, X, 1) & C_4 &\leftarrow C_4 + 2C_3 \\ &= \{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_3[X] \mid (a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4\}. \end{aligned}$$

Donc $F + G = \mathbb{R}_3[X]$.

Conclusion, F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$$F \oplus G = \mathbb{R}_3[X].$$

4.5 Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + 3f' + 7f = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

- Soit $f \in F \cap G$. Alors la fonction f vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & f''(x) + 3f'(x) + 7f(x) = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0. \end{cases}$$

Or on note que $0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ vérifie aussi ce même problème de Cauchy. Donc par unicité, $f = 0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$. Ainsi, $F \cap G \subseteq \{0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}$. Or on a aussi $\{0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\} \subseteq F \cap G$. Donc,

$$F \cap G = \{0_{\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}.$$

- *Analyse.* Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f = g + h$, $g \in F$ et $h \in G$. Alors g est l'unique solution de $f'' + 3f' + 7f = 0$ vérifiant $g(0) = f(0) - h(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0) - h'(0) = f'(0)$. Puis $h = f - g$.
Synthèse. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $y_0 = f(0)$ et $y_1 = f'(0)$. Alors le système suivant :

$$\begin{cases} g'' + 3g' + 7g = 0 \\ g(0) = y_0 \\ g'(0) = y_1 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy et admet donc une unique solution, que l'on note g . Posons également $h = f - g$. Alors

- (i) $f = g + h$
- (ii) g est solution de $g'' + 3g' + 7g = 0$ donc $g \in F$
- (iii) $\begin{cases} h(0) = f(0) - g(0) = f(0) - y_0 = f(0) - f(0) = 0 \\ h'(0) = f'(0) - g'(0) = f'(0) - y_1 = f'(0) - f'(0) = 0 \end{cases}$
donc $h \in G$.

Ainsi, $f \in F + G$. Donc $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq F + G$. Or on a aussi, $F + G \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc

$$F + G = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Conclusion, les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$F \oplus G = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

5. Déterminer la multiplicité d'une racine.

5.1 Soit $P = 5X^5 - 13X^4 + 12X^3 - 8X^2 + 7X - 3$. On a

$$P(1) = 5 - 13 + 12 - 8 + 7 - 3 = 0.$$

Donc 1 est une racine de P . De plus $P' = 25X^4 - 52X^3 + 36X^2 - 16X + 7$. Donc

$$P'(1) = 25 - 52 + 36 - 16 + 7 = -27 + 20 + 7 = 0.$$

Puis, $P'' = 100X^3 - 156X^2 + 72X - 16$. Donc

$$P''(1) = 100 - 156 + 72 - 16 = -56 + 72 - 16 = 0.$$

On continue, $P''' = 300X^2 - 312X + 72$. Donc,

$$P'''(1) = 300 - 312 + 72 = -12 + 72 = 60 \neq 0.$$

Donc 1 est une racine de multiplicité 3 de P .

5.2 Soit $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$. On remarque directement un binôme de Newton : $P = (X + 1)^3$. Donc, directement -1 est une racine de multiplicité 3 de P .

5.3 Posons $P = (X - 2)^2(X^2 - 13X + 22)$. Il est clair que 2 est une racine de multiplicité au moins 2 de P . Posons $Q = X^2 - 13X + 22$. Alors

$$Q(2) = 4 - 26 + 22 = 0.$$

De plus $Q' = 2X - 13$ et donc $Q'(2) = 4 - 13 = -9 \neq 0$. Donc 2 est une racine simple de Q et donc 2 une racine de multiplicité 3 de P .

5.4 Soit $P = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Commençons par rappeler les deux relations fondamentales pour j : le complexe j étant une racine 3-ième de l'unité on a $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. Ainsi

$$P(j) = j^4 + 2j^3 + 3j^2 + 2j + 1 = j + 2 + 3j^2 + 2j + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 0.$$

De plus $P' = 4X^3 + 6X^2 + 6X + 2$. Donc

$$P'(j) = 4j^3 + 6j^2 + 6j + 2 = 4 + 6j^2 + 6j + 2 = 6(j^2 + j + 1) = 0.$$

Et encore $P'' = 12X^2 + 12X + 6$ et donc

$$P''(j) = 12j^2 + 12j + 6 = 12(j^2 + j + 1) - 12 + 6 = -6 \neq 0.$$

Donc $P(j) = P'(j) = 0$ et $P''(j) \neq 0$. Conclusion, j est une racine double de P .

NB : lorsque l'on sait que j est une racine de multiplicité au moins deux, puisque P est à coefficients réels, on en déduit que $j^2 = \bar{j}$ est aussi une racine de multiplicité au moins deux de P . Or $\deg(P) = 4 = 2 + 2$. Donc j et j^2 sont deux racines doubles de P .

5.5 Soit $P = X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26$. On note que $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2$. Il nous suffit donc de montrer que -1 est une racine de multiplicité au moins 2 de P . On a

$$P(-1) = -1 + 6 - 10 - 20 + 51 - 26 = 0.$$

De plus $P' = 5X^4 + 24X^3 + 30X^2 - 40X - 51$ et

$$P'(-1) = 5 - 24 + 30 + 40 - 51 = 5 + 6 - 11 = 0.$$

Donc -1 est une racine de multiplicité au moins 2 de P et donc $(X + 1)^2$ divise P . Conclusion,

$$\boxed{X^2 + 2X + 1 \text{ divise } X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26.}$$

5.6 Soit $P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 8X + 4$. On note que $X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. Il nous suffit donc de montrer que 2 est une racine de multiplicité au moins 2 de P . On a

$$P(2) = 16 - 5 \times 8 + 9 \times 4 - 8 \times 2 + 4 = 16 - 40 + 36 - 16 + 4 = 0.$$

De plus $P' = 4X^3 - 15X^2 + 18X - 8$ et

$$P'(2) = 4 \times 8 - 15 \times 4 + 18 \times 2 - 8 = 32 - 60 + 36 - 8 = 0.$$

Donc 2 est une racine de multiplicité au moins 2 de P et donc $(X - 2)^2$ divise P . Conclusion,

$$\boxed{X^2 - 4X + 4 \text{ divise } X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 8X + 4.}$$