Correction de l'interrogation 15 d'entrainement
Ensembles et Applications

1. **Restituer le cours.**

   1.1 Soient E un ensemble et $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Alors,
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

   1.2 Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Alors,
   $$f(A) = \{ y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}$$
   $$f^{-1}(B) = \{ x \in E \mid f(x) \in B \}.$$

   1.3 Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$.
   $$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x,y) \in E^2,\ (f(x) = f(y)) \ \Rightarrow\ (x = y).$$
   $$f \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad y = f(x).$$

   1.4 Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F,E)$ telle que
   $$f \circ g = \mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
   De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

   1.5 Un professeur de mathématiques est une application (si, si je vous assure qu'un professeur ça s'applique...) qui part de E l'ensemble des élèves à la tête vide (que l'on modélisera par des sphères vides) et qui, à coups de remplissage de caboche par des jolies démonstrations, retourne un scientifique averti, dont l'ensemble est noté S. Cette application est complètement définie sur E car l'échec n'existe pas, tout élève soumis à son enseignement devient un solide scientifique (si, si, c'est ce qui vous attend tous que vous le vouliez ou non...), elle est injective (jamais vu deux élèves fusionner, faut arrêter de lire des mangas...) mais pas nécessairement surjective (lorsque l'on fixe l'enseignant du moins, il n'a pas la prétention de former à lui seul tous les scientifiques, une trentaine par an c'est déjà bien). Ce qu'il y a de rigolo avec cette application c'est que même si l'on restreint son ensemble d'arrivée à son image pour la rendre surjective et donc bijective, il n'existe pas d'application réciproque (à part peut-être une émission du style les Marseillais...)

2. **Donner un ensemble image ou réciproque.**

   2.1 On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-3		0		4		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

   On en déduit donc
   $$\boxed{f([-3\,;\,4]) = [0\,,\,16]\,.}$$

   2.2 On a les équivalences suivantes :
   $$\begin{aligned} x \in f^{-1}([-3\,;\,4]) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in [-3;4] \\ &\Leftrightarrow \quad -3 \leqslant f(x) \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 \leqslant x^2 \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 4 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \leqslant x \leqslant 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}([-3\,;\,4]) = [-2\,,\,2]\,.}$$

2.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in f\left(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})\right) \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \quad x = f(M) \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \quad x = Tr\,(M)\,.$$

Or si $M \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Tr}\,(M) = 0_{\mathbb{R}}$ et $\mathscr{A}_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Donc

$$x \in f\left(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = 0_{\mathbb{R}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(\mathscr{A}_2(\mathbb{R})\right) = \{0_{\mathbb{R}}\}\,.}$$

Attention ne mettez pas juste $0_{\mathbb{R}}$ mais bien l'ensemble contenant $0_{\mathbb{R}}$.

2.4 Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in f^{-1}(\{1\}) \quad & \Leftrightarrow \quad f(M) \in \{1\} \\ & \Leftrightarrow \quad f(M) = 1 \\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Tr}\,(M) = 1 \\ & \Leftrightarrow \quad a + d = 1 \\ & \Leftrightarrow \quad d = 1 - a. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(\{1\}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.}$$

2.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in f(\mathbb{U}) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists z \in \mathbb{U},\ x = f(z) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ x = f\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ x = 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ x = 2\cos(\theta) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R},\ \frac{x}{2} = \cos(\theta) \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \in [-1\,;\,1] \\ & \Leftrightarrow \quad x \in [-2; 2]\,. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(\mathbb{U}) = [-2\,;\,2]\,.}$$

2.6 Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(]-4\,;\,+\infty[) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) \in\,]-4\,;\,+\infty[\quad & \Leftrightarrow \quad 2\mathrm{Re}\,(z) \in\,]-4\,;\,+\infty[\\ & \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(z) \in\,]-2\,;\,+\infty[\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(]-4\,;\,+\infty[) = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \in\,]-2\,;\,+\infty[\}}$$

2.7 Montrons que $f\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Procédons par double inclusion.
Soit $M \in f\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$. Alors il existe $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = f(N)$ i.e. $M = N^T + N$. Alors $M^T = \left(N^T + N\right)^T = \left(N^T\right)^T + N^T = N + N^T = M$. Donc $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $f\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right) \subseteq \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement, soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, en posant $N = \frac{M}{2}$, on observe que $f(N) = N^T + N = \frac{M^T}{2} + \frac{M}{2} = \frac{M}{2} + \frac{M}{2}$ car $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et donc $f(N) = M$. Donc M admet un antécédent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc $M \in f\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$. Ainsi, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subseteq f\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)$.
Conclusion,

$$\boxed{f\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})\,.}$$

2.8 Montrons que $f^{-1}(\{0_n\}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in f^{-1}(\{0_n\}) \quad &\Leftrightarrow \quad f(M) = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad M^T + M = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad M^T = -M \\ &\Leftrightarrow \quad M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(\{0_n\}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).}$$

2.9 On a le tableau de variations suivant :

x	$\pi/2$		π		2π		3π		4π
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Conclusion,

$$\boxed{f\left(\left[\frac{\pi}{2}\,;\,4\pi\right]\right) = [-1\,;\,1].}$$

2.10 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]\right) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right] \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \cos(x) \leqslant \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\text{ OU }\; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}\left(\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\,-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,;\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]\right).}$$

2.11 Montrons que $f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]) = [-9\,;\,6]$. Procédons par double inclusion.
Soit $z \in f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3])$. Alors, il existe $(x, y) \in [-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]$ tel que $z = xy$. On a donc $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
Premier cas, $y \in [-2\,;\,0]$, alors $2y \leqslant xy \leqslant -3y$. Or $y \geqslant -2 \Rightarrow 2y \geqslant -4$ et $y \geqslant -2 \Rightarrow -3y \leqslant 6$. Donc $-4 \leqslant 2y \leqslant xy \leqslant -3y \leqslant 6$ et donc $z \in [-4; 6]$.
Second cas, $y \in [0\,;\,3]$, alors $-9 \leqslant -3y \leqslant xy \leqslant 2y \leqslant 6$ et donc $z \in [-9; 6]$.
Dans tous les cas, $z \in [-9\,;\,6]$. Donc $f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]) \subseteq [-9\,;\,6]$.
Réciproquement, si $z \in [-9\,;\,6]$. Alors en posant $x = 3$ et $y = \frac{z}{3} \in [-3\,;\,2]$, on a bien $(x, y) \in [-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]$ et $z = 3 \times \frac{z}{3} = xy$. Donc $z \in f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3])$. Ainsi, $[-9\,;\,6] \subseteq f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3])$.
Conclusion,

$$\boxed{f([-3\,;\,2] \times [-2\,;\,3]) = [-9\,;\,6].}$$

2.12 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} (x, y) \in f^{-1}(\{0_\mathbb{R}\}) \quad &\Leftrightarrow \quad xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \;\text{ OU }\; y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y) \in (\{0_\mathbb{R}\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0_\mathbb{R}\}). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(\{0_\mathbb{R}\}) = (\{0_\mathbb{R}\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0_\mathbb{R}\}).}$$

NB : c'est l'union des axes des abscisses avec l'axe des ordonnées.

2.13 Montrons que $f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin)) = \mathbb{R}$. Procédons par double inclusion.
Par définition de f, $f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin)) \subseteq \mathbb{R}$.
Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $g = \lambda \cos = \lambda \cos + 0 \times \sin \in \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. De plus $f(g) = g(0) = \lambda \cos(0) = \lambda$ *(attention ce n'est pas $f \circ g$ mais f évaluée en g, f est une application qui mange des fonctions)*. Donc g est un antécédent de λ par f dans $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ donc $\lambda \in f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin))$. Ainsi $\mathbb{R} \subseteq f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin))$. Conclusion,

$$\boxed{f(\mathrm{Vect}(\cos, \sin)) = \mathbb{R}.}$$

2.14 Soit $g \in \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$. Alors, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = \lambda \cos + \mu \sin$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g \in f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\}) \quad & \Leftrightarrow \quad f(g) = 0_{\mathbb{R}} \\ & \Leftrightarrow \quad g(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda \cos(0) + \mu \sin(0) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad g = \mu \sin \in \mathrm{Vect}(\sin). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\}) = \mathrm{Vect}(\sin).}$$

2.15 Montrons que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Procédons par double inclusion.
Soit $z \in f(\mathbb{R})$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = f(x) = x^5$. Or si $x \in \mathbb{R}$, alors $x^5 \in \mathbb{R}$ donc $z \in \mathbb{R}$. Ainsi, $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.
Réciproquement soit $z \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto x^5$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto 5x^4$ strictement positive sauf en un point $x = 0$) et continue et tendant vers $-\infty$ en $x \to -\infty$ et $+\infty$ en $x \to +\infty$, on en déduit du théorème de la bijection que $x \mapsto x^5$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc il existe (un unique) $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^5 = z$. Donc $z = f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $z \in f(\mathbb{R})$. D'où $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$. Conclusion,

$$\boxed{f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.}$$

2.16 Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}\left(\left\{\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}\right) \quad & \Leftrightarrow \quad z^5 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \\ & \Leftrightarrow \quad z \text{ est une racine 5ième de } \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}. \\ & \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;4]\!], \quad z = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{15} + i\frac{2k\pi}{5}}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}\left(\left\{\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}\right) = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{15} + i\frac{2k\pi}{5}} \;\middle|\; k \in [\![0\,;4]\!]\right\}.}$$

2.17 Montrons que $f(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Procédons par double inclusion.
Soit $B \in f(\mathscr{P}(E))$. Il existe $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $B = f(A)$. Deux cas possibles, si $1 \in A$ alors $B = f(A) = A \cap \{1\} = \{1\}$. Si $1 \notin A$ alors $B = f(A) = A \cap \{1\} = \emptyset$. Donc dans tous les cas, $B \in \{\emptyset, \{1\}\}$. Ainsi, $f(\mathscr{P}(E)) \subseteq \{\emptyset, \{1\}\}$.
Réciproquement, $\emptyset = f(\emptyset)$ donc $\emptyset \in f(\mathscr{P}(E))$ et $\{1\} = f(\{1\})$ donc $\{1\} \in f(\mathscr{P}(E))$. Ainsi, $\{\emptyset, \{1\}\} \subseteq f(\mathscr{P}(E))$. Conclusion,

$$\boxed{f(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset, \{1\}\}.}$$

2.18 Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \in f^{-1}(\{\{1\}\}) \quad & \Leftrightarrow \quad f(A) \in \{\{1\}\} \\ & \Leftrightarrow \quad f(A) = \{1\} \\ & \Leftrightarrow \quad A \cap \{1\} = \{1\} \\ & \Leftrightarrow \quad 1 \in A. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(\{\{1\}\}) = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, E\}.}$$

3. **Manipuler les ensembles.**

3.1 Supposons que $A \subseteq B$. Montrons que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. Soit $x \in f^{-1}(A)$. Par définition, $f(x) \in A$. Or $A \subseteq B$. Donc $f(x) \in B$, i.e. $x \in f^{-1}(B)$. On a donc démontré que tout élément de $f^{-1}(A)$ est un élément de $f^{-1}(B)$ et donc $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Conclusion

$$\boxed{A \subset B \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B).}$$

3.2 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \subseteq B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$. On a alors par définition qu'il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $A \subseteq B$. Donc $x \in B$. Par conséquent, $y = f(x) \in f(B)$. Donc tout élément de $f(A)$ est un élément de $f(B)$. Donc $f(A) \subseteq f(B)$. Conclusion,

$$\boxed{A \subset B \quad \Rightarrow \quad f(A) \subset f(B).}$$

3.3 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrons $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cup B \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ OU } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ OU } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).}$$

3.4 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in F$. On a

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists x_1 \in A,\ y = f(x_1)) \text{ OU } (\exists x_2 \in B,\ y = f(x_2)) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in f(A) \text{ OU } y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).}$$

3.5 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrons $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cap B \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ ET } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ ET } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).}$$

3.6 Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. L'élément $x \in A \cap B$, donc $x \in A$ et $x \in B$. Donc y est l'image d'un élément de A (l'élément x) et y est l'image d'un élément de B (le même, l'élément x). Par conséquent, $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(A) \cap f(B)$. Finalement, on a montré que

$$\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).}$$

3.7 Soit $A \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\overline{A}\right) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \notin A \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin f^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \overline{f^{-1}(A)}. \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}(A)}.}$$

4. **Manipuler les injections - surjections.**

4.1 Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective. Soit $y \in G$. Puisque $g \circ f \in \mathscr{F}(E,G)$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. Ainsi, en posant $z = f(x) \in F$, on observe que $y = g(f(x)) = g(z)$. Donc y possède un antécédente dans F. Ceci étant vrai pour tout $y \in G$ on en déduit que g est surjective. Conclusion,

$$\boxed{g \circ f \text{ surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ surjective.}}$$

4.2 Soit $f \in \mathscr{F}(F,G)$ injective. Soit $(g,h) \in \mathscr{F}(E,F)^2$ tel que $f \circ g = f \circ h$. Montrons que $g = h$. Soit $x \in E$. Par hypothèse, $f \circ g(x) = f \circ h(x)$ i.e. $f(g(x)) = f(h(x))$. Posons $y = g(x)$ et $y' = h(x)$. Alors $f(y) = f(y')$. Or la fonction f est injective donc $y = y'$ i.e. $g(x) = h(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $g = h$. Conclusion,

$$\boxed{\forall (g,h) \in \mathscr{F}(E,F)^2, \qquad f \circ g = f \circ h \quad \Rightarrow \quad g = h.}$$

4.3 Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ injective. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. On sait déjà (cf question 3.6) que , $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors

$$\begin{cases} y \in f(A) \\ y \in f(B) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \exists x_1 \in A,\ y = f(x_1) \\ \exists x_2 \in B,\ y = f(x_2). \end{cases}$$

En particulier $f(x_1) = f(x_2)$. Or f est injective donc les antécédents de y sont égaux $x_1 = x_2$. Notons x cet antécédent commun. On a $x = x_1 \in A$ et $x = x_2 \in B$. Donc $x \in A \cap B$. Or $y = f(x)$. Donc y possède un antécédent par f dans $A \cap B$. Donc $y \in f(A \cap B)$. Ainsi, $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).}$$

4.4 Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ surjective. Soit $A \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$. Soit $y \in \overline{f(A)}$. Alors $y \notin f(A)$. Donc pour tout $x \in A$, on a $y \neq f(x)$ i.e. y n'admet aucun antécédent dans A. Or f est surjective, on sait donc que y admet malgré tout un antécédent : il existe $x_0 \in E$ tel que $y = f(x_0)$. Puisque $y \notin f(A)$, on en déduit que $x_0 \notin A$. Donc $x_0 \in \overline{A}$ et puisque $y = f(x_0)$, on a $y \in f(\overline{A})$. Ainsi, $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$. Conclusion,

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad \overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A}).}$$

4.5 Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Alors $g(y) \in G$. Posons $z = g(y)$. Puisque $g \circ f$ est surjective alors on sait que z admet un antécédent par $g \circ f$: il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x)$. Dès lors, $g(y) = z = g(f(x))$. Or g est injective. Donc $y = f(x)$. Autrement dit x est un antécédent de y par f. Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

5. **Faire de la composition de développement limité.**

5.1 On a
$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right).$$
De plus,
$$\begin{aligned}\sqrt{1+u} &\underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}u^3 + o\left(u^3\right)\\ &\underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o\left(u^3\right)\end{aligned}$$
Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.
- $\frac{u(x)}{2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o\left(x^5\right)$.
- De plus,
$$\begin{aligned}u^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right)\end{aligned}$$
Donc $-\frac{u^2(x)}{8} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^4}{32} + o\left(x^5\right)$.
- Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$, alors $u^3(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{8}$. Donc $u^3(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)$.
- Enfin, $o\left(u^3(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)$.

Ainsi,
$$\begin{aligned}f(x) = \sqrt{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{1+u(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o\left(x^5\right) - \frac{x^4}{32} + o\left(x^5\right) + o\left(x^5\right) + o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} + \left(\frac{1}{16\times 3} - \frac{1}{16\times 2}\right)x^4 + o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)\frac{x^4}{16} + o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o\left(x^5\right)\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{96} + o\left(x^5\right).}$$
La fonction f étant paire et le développement de f étant en 0, il est logique que son développement n'admette que des puissances paires.

5.2 On a
$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right).$$
Donc
$$\begin{aligned}f(x) = \ln(\arctan(x)) &\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \ln\left(x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \ln\left(x\left(1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right)\right)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right)\right).\end{aligned}$$
De plus $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.
- De plus,
$$u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right)\right)\left(-\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$
- et $o\left(u^2(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Par conséquent,
$$f(x) \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \ln(x)+\ln(1+u(x)) \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \ln(x)-\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right)+o\left(x^3\right)+o\left(x^3\right)$$

Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \ln(x)-\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right).}$$

5.3 On a
$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right).$$

Donc
$$\begin{aligned} f(x)=\ln(\mathrm{sh}(x)) &\underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \ln\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \ln\left(x\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)\right)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \ln(x)+\ln\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)\right). \end{aligned}$$

De plus $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.
- De plus,
$$u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)\right)\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{36}+o\left(x^4\right).$$
Donc
$$-\frac{u^2(x)}{2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^4}{72}+o\left(x^4\right).$$
- et $o\left(u^2(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

Par conséquent,
$$f(x) \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \ln(x)+\ln(1+u(x)) \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \ln(x)+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)-\frac{x^4}{72}+o\left(x^4\right)+o\left(x^4\right).$$

Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} \ln(x)+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o\left(x^4\right).}$$

5.4 Soit $f : x \mapsto \frac{x-1}{2+\ln(x)}$. Posons $I = \left]\mathrm{e}^{-2}-1\,;+\infty\right[$, un voisinage de 0, et
$$\forall h \in I, \qquad g(h) = f(1+h) = \frac{h}{2+\ln(1+h)}.$$

On a
$$\ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h-\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right).$$

Donc
$$g(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{h}{2+h-\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)} = \frac{h}{2}\,\frac{1}{1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{4}+o\left(h^2\right)}$$

De plus, $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right)$. Posons $u(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{h}{2}-\frac{h^2}{4}+o\left(h^2\right)$. Alors,

- $u(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.
- $-u(h) \underset{h\to 0}{=} -\frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o\left(h^2\right)$.
- $u(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h}{2}$ donc $u^2(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2}{4}$ et donc
$$u^2(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{h^2}{4} + o\left(h^2\right)$$
- et $o\left(u^2(h)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h^2\right)$.

Par suite,
$$\begin{aligned} g(h) &\underset{h\to 0}{=} \frac{h}{2}\frac{1}{1+u(h)} \underset{h\to 0}{=} \frac{h}{2}\left(1 - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{4} + o\left(h^2\right) + \frac{h^2}{4} + o\left(h^2\right) + o\left(h^2\right)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{h}{2}\left(1 - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{4} + o\left(h^3\right). \end{aligned}$$

Conclusion,
$$\boxed{f(x) = g\left(x-1\right) \underset{x\to 1}{=} \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{4} + o\left((x-1)^3\right).}$$

5.5 On a
$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right).$$

Donc
$$f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)}.$$

Or $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.
- De plus,
$$u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right).$$
Donc $\frac{u^2(x)}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{8} + o\left(x^5\right)$.
- $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc $u^3(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^6}{8} \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)$.
- Enfin, $o\left(u^3(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)$.

Ainsi,
$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{u(x)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) + \frac{x^4}{8} + o\left(x^5\right) + o\left(x^5\right) + o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^5\right)\right). \end{aligned}$$

Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}\,x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}\,x^4}{6} + o\left(x^5\right).}$$

La fonction f étant paire et le développement limité étant 0, il est logique de n'avoir que des puissances paires dans son développement limité.