Correction de l'interrogation 13 d'entrainement
Matrices

1. **Restituer le cours.**

 1.1 Soient $(n, r, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)^T = B^T A^T$.

 1.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
 - La matrice M est symétrique $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $M^T = M$.
 - La matrice M est antisymétrique $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $M^T = -M$.

 1.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \neq j$, les trois opérations élémentaires pour les lignes sont
 - La permutation de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$.
 - La dilatation d'une ligne : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, **non nul**, $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
 - La transvection : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

 1.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \Leftrightarrow \qquad A \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_n \qquad \Leftrightarrow \qquad A \underset{\mathscr{C}}{\sim} I_n.$$

 1.5 Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Alors
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x)).$$

 1.6 Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

 i. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors f et g ont le même comportement en a : si f converge, g aussi et si f diverge, g aussi. De plus dans tous les cas f et g ont le même signe au voisinage de a.

 ii. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell.$$

 1.7 Sur les équivalents, il est possible de
 - multiplier,
 - d'élever à la puissance (éventuellement négative et donc de passer à l'inverse),
 - de passer à la valeur absolue,
 - de faire un changement de variable.

 Il est cependant interdit
 - de sommer des équivalents,
 - de composer des équivalents par une fonction,
 - d'écrire équivalent à 0.

2. **Savoir utiliser la formule du produit matriciel.**

 2.1 On a pour tout $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]$,
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} i k^2 = i \sum_{k=1}^{n} k^2 = i \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

 Conclusion,
$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad c_{ij} = i \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

2.2 On a pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$\begin{aligned} c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (3i+2k)\left(k\,\mathrm{e}^{j}\right) &= 3i\,\mathrm{e}^{j}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + 2\,\mathrm{e}^{j}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= 3i\,\mathrm{e}^{j}\,\frac{n\,(n+1)}{2} + 2\,\mathrm{e}^{j}\,\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad c_{ij} = \frac{n\,(n+1)\,(4n+2+9i)\,\mathrm{e}^{j}}{6}.}$$

2.3 On a pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$\begin{aligned} c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} &= \sum_{k=1}^{n} (i+k)\,(k+j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + (i+j)\,k + ij\right) \\ &= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (i+j)\,\frac{n\,(n+1)}{2} + nij. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad c_{ij} = \frac{n\left[(n+1)\,(2n+1) + 3\,(i+j)\,(n+1) + 6ij\right]}{6}.}$$

2.4 Notons $AB = (u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$,

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Par suite, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$,

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} u_{il}c_{lj} = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}.$$

Conclusion

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad d_{ij} = \sum_{1\leqslant k,l\leqslant n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}.}$$

2.5 On a pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} 2^{i+k}3^{k-j} = \frac{2^i}{3^j}\sum_{k=1}^{n} 6^k.$$

On reconnait une somme géométrique de raison $6 \neq 1$. Donc

$$c_{ij} = \frac{2^i}{3^j}6\frac{6^n-1}{6-1} = \frac{2^{i+1}\,(6^n-1)}{5\times 3^{j-1}5}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall\,(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \quad c_{ij} = \frac{2^{i+1}\,(6^n-1)}{5\times 3^{j-1}}.}$$

3. **Savoir calculer les puissances d'une matrice.**

3.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculons :

$$\begin{aligned}A(\theta)^2 &= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta)-\sin(\theta)\cos(\theta)\\ \cos(\theta)\sin(\theta)-\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)\end{pmatrix}\\ &= I_2.\end{aligned}$$

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$. Si p est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. Dans ce cas,

$$A(\theta)^p = A(\theta)^{2k} = \left(A(\theta)^2\right)^k = I_2^k = I_2.$$

Si p est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k+1$ donc

$$A(\theta)^p = A(\theta)^{2k} A(\theta) = I_2 A(\theta) = A(\theta).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A(\theta)^p = \begin{cases} I_2 & \text{si } p \text{ est pair}\\ A & \text{si } p \text{ est impair.}\end{cases}}$$

3.2 Calculons :

$$A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ i & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ i & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Puis,

$$A^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ i & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -i & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3.$$

Notamment A est inversible et $A^{-1} = A^2$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^{3k} = \left(A^3\right)^k = I_3^k = I_3.$$

Puis,

$$A^{3k+1} = A^{3k}A = A \qquad \text{et} \qquad A^{3k+2} = A^{3k}A^2 = A^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \begin{cases} I_3 & \text{si } p \equiv 0 \ [3]\\ A & \text{si } p \equiv 1 \ [3]\\ A^2 & \text{si } p \equiv 2 \ [3].\end{cases}}$$

3.3 Calculons :

$$A^2 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -I_2.$$

Alors $A^3 = -I_2 \times A = -A$ et $A^4 = A^3A = -AA = -A^2 = -(-I_2) = I_2$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}A^{4k} &= \left(A^4\right)^k = I_2\\ A^{4k+1} &= A^{4k}A = A\\ A^{4k+2} &= A^{4k}A^2 = A^2 = -I_2\\ A^{4k+3} &= A^{4k}A^3 = A^3 = -A.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \begin{cases} (-1)^{p/2} I_2 & \text{si } p \text{ est pair}\\ (-1)^{\frac{p-1}{2}} A & \text{si } p \text{ est impair.}\end{cases}}$$

3.4 On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(k) : \text{« } B^k = B \text{ ».}$$

Effectuons une récurrence.
Initialisation. Si $k = 1$, alors $B^1 = B$ et donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ l'est également. On a $B^{k+1} = BB^k = BB$ par hypothèse de récurrence. Donc $B^{k+1} = B^2 = B$ par hypothèse sur B. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = B$.
De plus B commute avec I_n. Donc par la formule du binôme de Newton, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^p = (2I_n - B)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-B)^k (2I_n)^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k B^k (2I_n)^{p-k} \\ &= 2^p I_n + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k 2^{p-k} B \qquad \text{par ce qui précède} \\ &= 2^p I_n + \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k 2^{p-k} - 2^p \right) B \\ &= 2^p I_n + ((2-1)^p - 2^p) B \\ &= 2^p I_n + (1 - 2^p) B. \end{aligned}$$

On note que cette formule reste vraie si $p = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = 2^p I_n + (1 - 2^p) B.}$$

3.5 Calculons,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On pose alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(p) \quad : \text{« } A^p = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix}. \text{ »}$$

Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $p = 1$, alors $\begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ et donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(p+1)$ l'est également. On a

$$\begin{aligned} A^{p+1} = AA^p &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix} \qquad \text{par hypothèse de récurrence.} \\ &= \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 2^p \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^p & 0 & 2^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^0 = I_3.}$$

4. **Calculer l'inverse d'une matrice.**

4.1 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$
\begin{array}{lcr}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Ainsi,

$$
\begin{array}{lcr}
P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} & I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

On vérifie toujours son résultat en calculant PP^{-1} ou $P^{-1}P$:

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = I_3 \; \textit{OK !}$$

4.2 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$
\begin{array}{ll}
P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2
\end{array}
$$

La dernière matrice est échelonnée avec deux pivots seulement. Donc $\boxed{P \text{ n'est pas inversible}}$.

4.3 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$
\begin{array}{rlcl}
P = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

On vérifie toujours son résultat en calculant PP^{-1} ou $P^{-1}P$:

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = I_3 \ \textit{OK!}$$

4.4 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$
\begin{array}{rlcl}
P = & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

On vérifie toujours son résultat en calculant PP^{-1} ou $P^{-1}P$:

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3 \text{ } \textit{OK!}$$

4.5 En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$\begin{array}{lcr}
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow -L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

On vérifie toujours son résultat en calculant PP^{-1} ou $P^{-1}P$:

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = I_3 \text{ } \textit{OK!}$$

5. **Calculer un équivalent.** *Notez bien les détails de la rédaction et les justifications données.*

5.1 Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\ln\left(n^2+1\right) = \ln\left(n^2\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. Posons $u = \frac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On sait que

$$\ln(1+u) \underset{u \to 0}{=} u + o(u).$$

Donc

$$\ln\left(n^2+1\right) \underset{n \to +\infty}{=} 2\ln(n) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\ll} \frac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\ll} 2\ln(n)$. Ainsi,

$$\ln\left(n^2+1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\ln(n).$$

D'autre part, $n+1 \underset{n \to +\infty}{\sim} n$. Donc par quotient d'équivalents,

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{n}.}$$

5.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. Donc en posant $u = \frac{1}{n} \to 0$, on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc par élévation à la puissance $1/2$,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.}$$

5.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \mathrm{e}^{n^2+3n+\frac{5}{\sqrt{n}}+\frac{6}{n}{}^2} = \mathrm{e}^{n^2+3n}\,\mathrm{e}^{\frac{5}{\sqrt{n}}+\frac{6}{n^2}}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{n}} + \frac{6}{n^2} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{5}{\sqrt{n}}+\frac{6}{n^2}} = \mathrm{e}^0 = 1 \neq 0.$$

Ainsi

$$\mathrm{e}^{\frac{5}{\sqrt{n}}+\frac{6}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

Donc par produit,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{n^2+3n}.}$$

5.4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Or

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u).$$

Donc en posant $u = \frac{1}{n} \to 0$, on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^1\,\mathrm{e}^{o(1)}.$$

Or, on sait que $\mathrm{e}^v \underset{v\to 0}{\sim} 1$. Donc en posant $v = o(1) \to 0$, on a $\mathrm{e}^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}.}$$

5.5 Pour tout $x \in \left]-\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+3x}} - \frac{1}{\sqrt{2-3x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3x}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3x}{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-1/2} - \left(1-\frac{3x}{2}\right)^{-1/2}\right).$$

Or on sait que $(1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{=} 1+\alpha u + o(u)$. Donc en prenant $\alpha = -1/2$ et $u = \frac{3x}{2} \to 0$, on a

$$\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3x}{2} + o\left(\frac{3x}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{3x}{4} + o(x).$$

De même en prenant $u = -\frac{3x}{2}$, on a également

$$\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3x}{4} + o(x).$$

Par conséquent,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{3x}{4}+o(x)-1-\frac{3x}{4}+o(x)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{3x}{2\sqrt{2}}+o(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{3\sqrt{2}x}{4}+o(x)$$

Autrement dit,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{3\sqrt{2}x}{4}.}$$