Interrogation 13 d'entrainement
Matrices

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Enoncer la propriété donnant la transposée du produit.
   1.2 Définir une matrice symétrique/antisymétrique.
   1.3 Enoncer les opérations élémentaires.
   1.4 A l'aide des opérations élémentaires donner la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice.
   1.5 Enoncer la proposition reliant l'équivalence et la négligeabilité entre deux fonctions (Prop II.3).
   1.6 Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique ? (Prop II.4)
   1.7 Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.

   Révisions

   1.8 Enoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
   1.9 Donner les racines d'un trinôme. On veillera à bien définir toutes les quantités.
   1.10 Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
   1.11 Définir l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Que dire du produit de deux racines n-ième de l'unité ? de l'inverse d'une racine n-ième de l'unité ? de son conjugué ?
   1.12 Caractériser l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
   1.13 Définir j. Que vaut j^2 ? j^3 ? $1+j+j^2$?
   1.14 Caractériser les racines n-ièmes de l'unité par une somme.
   1.15 Enoncer la propriété donnant les racines n-ièmes d'un complexe quelconque.

2. **Savoir utiliser la formule du produit matriciel.**
   2.1 Soient $A=(i)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B=\left(i^2\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$, le coefficient c_{ij} de la matrice AB.
   2.2 Soient $A=(3i+2j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B=\left(i\,\mathrm{e}^j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$, le coefficient c_{ij} de la matrice AB.
   2.3 Soit $A=(i+j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$, le coefficient c_{ij} de la matrice A^2.
   2.4 Soient $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $C=(c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer pour tout $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$ sous forme d'une seule somme double, le coefficient d_{ij} de la matrice ABC.
   2.5 Soient $A=\left(2^{i+j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B=\left(3^{i-j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$, le coefficient c_{ij} de la matrice AB.

3. **Savoir calculer les puissances d'une matrice.**
   3.1 Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On pose $A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p\in\mathbb{N}$, $A(\theta)^p$.
   3.2 On pose $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ i & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p\in\mathbb{N}$, A^p.
   3.3 On pose $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p\in\mathbb{N}$, A^p.
   3.4 Soit $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2=B$. On pose $A=2I_n-B$, calculer pour tout $p\in\mathbb{N}$, A^p.
   3.5 Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p\in\mathbb{N}$, A^p.

4. **Calculer l'inverse d'une matrice.**

4.1 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

4.2 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

4.3 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

4.4 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

4.5 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

5. **Calculer un équivalent.**

5.1 Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$. *Indication (i).*

5.2 Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$. *Indication (ii).*

5.3 Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \mathrm{e}^{n^2+3n+\frac{5}{\sqrt{n}}+\frac{6}{n^2}}$. *Indication (iii).*

5.4 Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. *Indication (iv).*

5.5 Déterminer en justifiant un équivalent en 0 de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+3x}} - \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$. *Indication (v).*

Indications.

(i) Factoriser dans le logarithme par le terme prépondérant.
Attention ! On rappelle que l'on ne compose pas les équivalents : $u \sim v \not\Rightarrow \ln(u) \sim \ln(v)$.

(ii) Rassembler les logarithmes. Déterminer un équivalent du logarithme. Elever les équivalents à la puissance 1/2.

(iii) Séparer ce qui ne tend pas vers 0 de ce qui tend vers 0 grâce à la formule $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$. Puis utiliser utiliser l'équivalent de $\mathrm{e}^{o(1)}$.

(iv) Ecrire que $u_n = \mathrm{e}^{\ln(u_n)}$ puis trouver la limite de $\ln(u_n)$ par un équivalent.

(v) Factoriser par le terme prépondérant dans chaque racine puis faire un petit DL.