Correction de l'interrogation 29
Couples de variables aléatoires

1. (a) Enoncer le lien entre la fonction génératrice, l'espérance et la variance.

Solution. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. Alors, sa fonction génératrice G_X vérifie :

$$G_X(1) = 1, \qquad \mathbb{E}(X) = G'_X(1) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

(b) Enoncer le théorème de transfert.

Solution. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

(c) Définir une application linéaire.

Solution. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{F}(E, F)$ une fonction de E dans F. On dit que f est linéaire si et seulement si

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2, \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

2. On dispose d'une urne possédant n boules vertes et une boule rouge. On pioche successivement et sans remise les boules une par une et on note X le rang d'apparition de la boule rouge. Donner la loi, l'univers, l'espérance et la variance de X. Quelle est la probabilité que la rouge apparaisse en dernière ?

Solution. L'expérience revient à ordonner toutes les boules. La rouge a alors autant de chance de se trouver en première position qu'en deuxième ou troisième etc ou dernière position. Ainsi X est une loi uniforme. Puisqu'il y a $n+1$ boules dans l'urne, on en déduit que

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1; n+1 \rrbracket) \qquad X(\Omega) = \llbracket 1; n+1 \rrbracket \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{n+2}{2} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n(n+2)}{12}.}$$

3. Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires dont la loi est donnée par

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Déterminer la loi de X en déduire son espérance et sa variance.

Solution. La famille $((Y=0), (Y=1), (Y=2))$ forme un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales et le tableau on a

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}((X=0) \cap (Y=0)) + \mathbb{P}((X=0) \cap (Y=1)) + \mathbb{P}((X=0) \cap (Y=2)) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}((X=1) \cap (Y=0)) + \mathbb{P}((X=1) \cap (Y=1)) + \mathbb{P}((X=1) \cap (Y=2)) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Et enfin,

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}((X=2) \cap (Y=0)) + \mathbb{P}((X=2) \cap (Y=1)) + \mathbb{P}((X=2) \cap (Y=2)) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0; 2 \rrbracket).}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{2} i\mathbb{P}(X = i) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Puis, par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{i=0}^{2} i^2\mathbb{P}(X = i) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}.$$

Donc par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{2}{3}.}$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ et $Y_n = \ln\left(1 + \frac{1}{X_n}\right)$. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.
Solution. Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\frac{1}{n} && \text{car } X_n \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 1; n \rrbracket) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)).
\end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \frac{\ln(n+1) - \ln(1)}{n} = \frac{\ln(n+1)}{n}.}$$

5. Soient $p \in]0; 1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Calculer $\operatorname{Cov}(U, V)$ et $\mathbb{P}(U = 1 \mid V = 0)$. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
Solution. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(U, V) &= \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) \\
&= \mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) - \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X-Y) \\
&= \mathbb{E}\left(X^2 - Y^2\right) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)) && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2\right) \\
&= \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) && \text{par la formule de Koenig-Huygens} \\
&= 0. && \text{car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi et donc la même variance.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{Cov}(U, V) = 0.}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = 1 \mid V = 0) &= \mathbb{P}(X + Y = 1 \mid X - Y = 0) \\
&= \mathbb{P}(X + Y = 1 \mid X = Y) \\
&= \mathbb{P}(2X = 1 \mid X = Y) \\
&= \mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2} \,\middle|\, X = Y\right).
\end{aligned}$$

Or $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ donc $\frac{1}{2} \notin X(\Omega)$ et donc $\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2} \,\middle|\, X = Y\right) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(U = 1 \mid V = 0) = 0.}$$

Cependant, on remarque que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(U=1\right) &= \mathbb{P}\left(\left[(X=1)\cap(Y=0)\right]\sqcup\left[(X=1)\cap(Y=0)\right]\right) & \\
&= \mathbb{P}\left((X=1)\cap(Y=0)\right)+\mathbb{P}\left((X=0)\cap(Y=1)\right) & \text{car l'union est disjointe} \\
&= \mathbb{P}\left(X=1\right)\mathbb{P}\left(Y=0\right)+\mathbb{P}\left(X=0\right)\mathbb{P}\left(Y=1\right) & \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendants} \\
&= p\left(1-p\right)+\left(1-p\right)p = 2p\left(1-p\right)\neq 0 & \text{car } p\in\,]0;1[.
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}\left(U=1 \mid V=0\right)\neq\mathbb{P}\left(U=1\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Bien que les variables } U \text{ et } V \text{ soient non corrélées, elles ne sont pas indépendantes.}}$$