

Correction de l'interrogation 28

Représentation matricielle

1. (a) Préciser l'isomorphisme entre les applications linéaires et les matrices. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$?

Solution. Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, E et F deux espaces vectoriels de dimension p et n respectivement, \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F . Alors, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f), \end{aligned}$$

forme un isomorphisme. En particulier $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np$.

- (b) Donner la matrice d'une composition.

Solution. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, \mathcal{B}_E une base de E , \mathcal{B}_F une base de F , \mathcal{B}_G , une base de G , $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

- (c) Donner la notation pour l'ensemble des parties d'un ensemble. Lorsque E est fini en donner son cardinal.

Solution. Soit E un ensemble fini de cardinal n . L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$ et son cardinal est

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

2. Soit $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $M \mapsto \text{Tr}(M^2)X^2 + \text{Tr}(M)X + 1$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques.

Solution. Soient $\mathcal{C}_1 = (E_1, E_2, E_3, E_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_2 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a

$$f(E_1) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) X^2 + \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) X + 1 = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) X^2 + X + 1 = X^2 + X + 1$$

$$f(E_2) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) X^2 + \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) X + 1 = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) X^2 + 1 = 1$$

$$f(E_3) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) X^2 + \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) X + 1 = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) X^2 + 1 = 1$$

$$f(E_4) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) X^2 + \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) X + 1 = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) X^2 + X + 1 = X^2 + X + 1.$$

Conclusion,

$$\text{mat}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soient $\mathcal{B}_1 = (X^2 + 1, X + 1, 2X^2 - X)$ et $\mathcal{B}_2 = (1 + X, X^2 + X, 2 - X^2)$. On admet que \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$.

Solution. On cherche $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$. Soit $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On sait que $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} =$

$P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}} P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_1}^{-1} P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_2}$. Calculons $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_1}^{-1}$. On a

$$\begin{array}{lcl}
 P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

On a pensé à vérifier son résultat $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_1} P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_1}^{-1} = I_3$.

Donc $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_1}$ est bien inversible (ce qui confirme que \mathcal{B}_1 est une base) et donc

$$P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_1}^{-1} P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans \mathbb{R}^3 , \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 , et $\mathcal{B} =$

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. On admet que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 et on donne $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Deux méthodes : vous pouvez faire les deux, 2 points par méthode faite.

Solution. Méthode 1, par la formule de changement de base. Soit $P = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, d'après l'énoncé, on a

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $A = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Par la formule de changement de base,

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2, par le calcul des images. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque l'on est dans la base canonique de \mathbb{R}^3 ,

$$f(e_1) = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f(e_1)) = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f) \text{mat}_{\mathcal{E}}(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $f(e_1) = 0_{3,1}$. De même,

$$f(e_2) = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -e_2.$$

Enfin,

$$f(e_3) = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5e_3.$$

Ainsi, $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = -e_2$ et $f(e_3) = 5e_3$. Conclusion,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ l'endomorphisme canoniquement associé à A . Calculer le noyau, l'image et le rang de f .

Solution. On note que $C_1 = -C_3$. Donc $\text{rg}(A) \leq 2$. D'autre part, C_2 et C_3 ne sont pas colinéaires. Donc $\text{rg}(A) \geq 2$. Ainsi, $\text{rg}(A) = 2$. De plus (C_2, C_3) forme une famille libre de $\text{Im}(A)$ et comme $\text{Card}(C_2, C_3) = 2 = \text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$, on en déduit que (C_2, C_3) est une base de $\text{Im}(A)$:

$$\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Ker}(A)) = 3 - \text{rg}(A) = 3 - 2 = 1.$$

Or, puisque $C_1 + C_3 = 0$, on en déduit que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(A)$. Donc $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ forme une famille libre de $\text{Ker}(A)$ et de cardinal $1 = \dim(\text{Ker}(A))$ donc forme une base de $\text{Ker}(A)$:

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Ainsi, on a directement,

$\text{rg}(f) = 2,$	$\text{Im}(f) = \text{Vect}(-2X - X^2, 1 + X + X^2),$	$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(1 + X^2).$
---------------------	---	---