Correction de l'interrogation 27
Intégration

1. (a) Enoncer l'inégalité de la moyenne.
Solution. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $(f,g)\in\mathscr{C}([a;b])^2$. Puisque f est continue, $\sup_{z\in[a;b]}|f(z)|$ existe dans $\mathbb{R}$. De plus, puisque $a<b$,
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sup_{z\in[a;b]}|f(z)|\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$
(b) Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}(I)$, $a\in I$ et $A\in\mathbb{R}$. Alors la fonction
$$F:\quad \begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto A+\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$
existe, est continue et même $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f sur I vérifiant $F(a)=A$.
(c) Enoncer le théorème de comparaison.
Solution. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que
$$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\qquad 0\leqslant u_n\leqslant v_n.$$
Dans ce cas, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
Par contraposée, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge.

2. Déterminer la limite de $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x$ quand $n\to+\infty$.
Solution. Pour tout $x\in[0;1]$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $1+\mathrm{e}^{nx}\geqslant \mathrm{e}^{nx}$. Donc $0<\frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\leqslant \mathrm{e}^{-nx}$. Donc par croissance de l'intégrale (car les bornes sont dans le bon sens) :
$$0\leqslant I_n\leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}=0$. Donc par le théorème d'encadrement,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n=0.}$$

3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+3k}$.
Solution. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a
$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+3\frac{k}{n}}.$$
Posons $f:t\mapsto\frac{1}{1+3t}$. La fonction f est continue sur $[0;1]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$. On reconnaît donc une somme de Riemann. Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{1+3t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\ln(1+3t)}{3}\right]_{t=0}^{t=1}=\frac{\ln(4)}{3}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{\ln(4)}{3}.}$$

4. Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{1/x}^{1} \mathrm{e}^{\left(1/t^2\right)}\,\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de dérivabilité de φ et calculer sa dérivée.

Solution. Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{t^2}}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On observe que $\left[\frac{1}{x};1\right] \subseteq \mathbb{R}^*$ si et seulement si $\frac{1}{x} > 0$ i.e. $x > 0$. La fonction f est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et $1 \in]0;+\infty[$ donc par le théorème fondamental de l'analyse,

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est bien définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x) = F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right) = 0 - F\left(\frac{1}{x}\right) = -F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{(1/x)^2}} = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}.$$

Conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}.}$$

5. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre 2 entre 1 et $x \in [1;+\infty[$ et montrer que son reste est majoré par $\frac{5}{128\sqrt{2}}\,(x-1)^3$.

Solution. Soit $x \in [1;+\infty[$. La fonction f est $\mathscr{C}^3$ sur $[1;+\infty[$ donc sur $[1;x]$ et pour tout $t > 1$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1/2}{(1+t)^{3/2}} = -\frac{1}{2\,(1+t)^{3/2}}, \\ f''(t) &= -\frac{(-3/2)}{2\,(1+t)^{5/2}} = \frac{3}{4\,(1+t)^{5/2}}, \\ f^{(3)}(t) &= \frac{3\,(-5/2)}{4\,(1+t)^{7/2}} = -\frac{15}{8\,(1+t)^{7/2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, par la formule de Taylor-Lagrange,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}\,(x-1)^k \right| \leqslant \sup_{t\in[1;x]} \left|f^{(3)}(t)\right| |x-1|^3.$$

Autrement dit,

$$\left| f(x) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x-1}{4\sqrt{2}} + \frac{3\,(x-1)^2}{4\times 4\sqrt{2}\times 2} \right) \right| \leqslant \sup_{t\in[1;x]} \left| \frac{15}{8\,(1+t)^{7/2}} \right| \frac{|x-1|^3}{6}.$$

Ou encore

$$\boxed{\left| \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{4\sqrt{2}} - \frac{3\,(x-1)^2}{32\sqrt{2}} \right| \leqslant \sup_{t\in[1;x]} \left| \frac{15}{8\,(1+t)^{7/2}} \right| \frac{|x-1|^3}{6}.}$$

Or pour tout $t \in [1;x]$, $0 < 2 \leqslant 1+t \leqslant 1+x$ donc $0 < 8\sqrt{2} \leqslant (1+t)^{7/2}$ et $\frac{1}{(1+t)^{7/2}} \leqslant \frac{1}{8\sqrt{2}}$. Ainsi,

$$\sup_{t\in[1;x]} \left| \frac{15}{8\,(1+t)^{7/2}} \right| \leqslant \frac{15}{64\sqrt{2}}.$$

Conclusion, puisque $x \geqslant 1$,

$$\boxed{\left| \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{13}{16\sqrt{2}} \right| \leqslant \frac{5}{128\sqrt{2}}\,(x-1)^3.}$$