

Réponses de l'interrogation 18

Polynômes

1. (a) Définir une racine de multiplicité m .

Solution. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si

$$(X - \alpha)^m \text{ divise } P \quad \text{et} \quad (X - \alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P.$$

- (b) Caractériser la multiplicité à l'aide des dérivées.

Solution. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a

$$\alpha \text{ racine de } P \text{ de multiplicité } m \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

- (c) Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique ?

Solution. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a , f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

- i. Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ alors f et g ont le même comportement en a : si f converge, g aussi et si f diverge, g aussi. De plus dans tous les cas f et g ont le même signe au voisinage de a .
- ii. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell.$$

2. (a) Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $n = \deg(P) > 1$ et $Q = (P \circ P)' - P' \circ P'$. Que vaut $\deg(Q)$?

Solution. Par conséquent,

$$\deg(Q) = \deg((P \circ P)') = n^2 - 1.$$

- (b) Soient $P = 5X^3 - 4X^2 - 2X + 1$ et $Q = X + 2$. Calculer $P \circ Q$ et préciser son degré.

Solution. Conclusion,

$$P \circ Q = 5X^3 + 26X^2 + 42X + 21 \quad \text{et} \quad \deg(P \circ Q) = 3.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $XP' = 2P$.

Solution. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \{a_2 X^2 \mid a_2 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^2).$$

On note bien que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ est une solution. Vérification : si $P = X^2$, $XP' = 2x^2 = 2P$ OK !

4. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - X^3 + X - 1$ puis donner sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution. Conclusion, sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est donnée par

$$P = (X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Conclusion, la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par

$$P = (X - 1)(X + 1)(X^2 + j)(X + j^2).$$

5. Déterminer la limite de la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1+i}{2}u_n - 3i + 1$.

Solution. Conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4 - 2i.$$