

Correction de l'interrogation 16

Continuité-dérivabilité

1. (a) Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.

Solution. Soient $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a et $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors les deux points suivants sont équivalents :

i. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

ii. pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a , on a $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l .

- (b) Énoncer l'identité des accroissements finis.

Solution. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

- (c) Donner la définition d'un maximum, d'un minimum d'une partie.

Solution. Soient $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} m = \min(A) &\Leftrightarrow m \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad m \leq x \\ M = \max(A) &\Leftrightarrow M \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \leq M. \end{aligned}$$

2. (a) Donner la définition rigoureuse de « la fonction f est positive au voisinage à droite de 1 ».

(b) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{e^{3 \arcsin(t)}}$ est minorée sur $[0; 1]$.

Solution.

- (a) La fonction f est positive au voisinage à droite de 1 s'écrit

$$\exists \eta > 0, \forall x \in]1; 1 + \eta], \quad f(x) \geq 0.$$

- (b) La fonction $\arcsin$ est continue sur $[0; 1]$ et la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc par composée, la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{e^{3 \arcsin(t)}}$ est continue sur le segment $[0; 1]$. Or par le théorème des bornes atteintes, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Donc g est bornée sur $[0; 1]$ et atteint ses bornes. Notamment,

$$g \text{ admet un minimum.}$$

3. Montrer que $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est 1-lipschitzienne.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ donc f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |f'(x)| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq f'(x) \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq \frac{2x}{1 + x^2} \leq 1 \\ &&\Leftrightarrow -1 - x^2 \leq 2x \leq 1 + x^2 &\text{car } 1 + x^2 > 0 \\ &&\Leftrightarrow 0 \leq 2x + 1 + x^2 \text{ ET } 0 \leq 1 + x^2 - 2x \\ &&\Leftrightarrow 0 \leq (1 + x)^2 \text{ ET } 0 \leq (x - 1)^2. \end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq 1$ et donc $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| \leq 1$. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$. Alors f est continue sur $[x; y]$ (ou $[x; y]$), dérivable sur $]x; y[$ (ou $]y; x[$) donc par l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{t \in]x, y[} |f'(t)| |x - y| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| |x - y| \leq 1 \times |x - y|.$$

L'inégalité reste vraie si $x = y$. Conclusion,

$$\text{la fonction } f \text{ est 1-lipschitzienne.}$$

4. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Solution. On a d'une part,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \leq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \leq 0}} 0 = 0.$$

Et d'autre part, par croissance comparée,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 \ln(x) = 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe et

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0. Or f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (comme produit de fonctions qui le sont sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme fonction nulle sur $\mathbb{R}_-^*$). Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont et sur $]-\infty; 0[$ comme étant la fonction nulle. Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. On a également,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

D'une part on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 0 = 0.$$

D'autre part, par croissance comparée,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x \ln(x) + x = 0.$$

Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = 0.$$

Ainsi,

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe et vaut 0.

Donc par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et $f'(0) = 0$. La fonction f étant aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, on en conclut que

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 0.}$$

5. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{\text{sh}(2x)} - \frac{1}{2x}$.

Solution. On a

$$\text{sh}(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o(x^5) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x \left(1 + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4) \right).$$

Donc

$$\frac{1}{\text{sh}(2x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2x} \frac{1}{1 + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4)}.$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$. Posons $u(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4)$. Alors

- $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- De plus,

$$u^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4) \right) \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{4x^4}{9} + o(x^4).$$

- $o(u^2(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^4)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{15} + o(x^4) + \frac{4x^4}{9} + o(x^4) + o(x^4) \right) - \frac{1}{2x} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{15} + \frac{2x^3}{9} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{3} + \frac{(-3+10)x^3}{45} + o(x^3). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{3} + \frac{7x^3}{45} + o(x^3).$$