

Corrigé du Devoir Surveillé 7
espaces vectoriels, dimension, séries,
applications linéaires

Problème I - Espaces vectoriels et dimension

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit

$$u(P) = X(1 - X)P' + nXP.$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose

$$F_k = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid u(P) = kP\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid X(1 - X)P' + nXP = kP\}.$$

On définit également,

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad B_k = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

Enfin, on pose

$$H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(2) = 0\}.$$

L'objectif de ce problème est d'utiliser nos connaissances sur les espaces vectoriels pour déterminer les F_k .

Partie 1 : Généralités

1. On observe les points suivants :

- $H \subset \mathbb{R}_n[X]$ par définition.
- Si $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, alors on a directement $P(2) = 0_{\mathbb{R}}$ donc $0_{\mathbb{R}_n[X]} \in H$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in H^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. On a

$$R(2) = (\lambda P + \mu Q)(2) = \lambda P(2) + \mu Q(2).$$

Or $P \in H$ donc $P(2) = 0$ et $Q \in H$ donc $Q(2) = 0$. Ainsi, $R(2) = 0$ et donc $R = \lambda P + \mu Q \in H$.
 L'ensemble H est donc stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$H \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X].$$

2. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On observe les points suivants.

- $F_k \subset \mathbb{R}_n[X]$ par définition.
- Si $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Alors, $X(1 - X)P' + nXP = X(1 - X) \times 0_{\mathbb{R}_n[X]} + nX \times 0_{\mathbb{R}_n[X]} = 0_{\mathbb{R}_n[X]} = k0_{\mathbb{R}_n[X]} = kP$. Donc $0_{\mathbb{R}_n[X]} \in F_k$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in F_k^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Montrons que $R \in F_k$ i.e. $X(1 - X)R' + nXR = kR$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned} X(1 - X)R' + nXR &= X(1 - X)(\lambda P + \mu Q)' + nX(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda(X(1 - X)P' + nXP) + \mu(X(1 - X)Q' + nXQ) \\ &\quad \text{par linéarité de la dérivée et du produit à gauche} \\ &= \lambda kP + \mu kQ \quad \text{car } P \in F_k \text{ et } Q \in F_k \\ &= k(\lambda P + \mu Q) \\ &= kR. \end{aligned}$$

Donc $R = \lambda P + \mu Q \in F_k$ et F_k est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$F_k \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X].$$

3. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$\mathcal{B}_{can} = (1, X, X^2, \dots, X^n).$$

On en déduit notamment que

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \text{Card}(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1.$$

Partie 2 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

4. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned} H &= \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = 0\} \\ &= \{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0\} \\ &= \{P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_0 = -2a_1 - 4a_2\} \\ &= \{P = -2a_1 - 4a_2 + a_1X + a_2X^2 \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{P = a_1(X - 2) + a_2(X^2 - 4) \mid (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(X - 2, X^2 - 4). \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{B}_H = (X - 2, X^2 - 4)$. La famille \mathcal{B}_H engendre H . De plus \mathcal{B}_H est composée de deux vecteurs non colinéaires (ou de deux polynômes de degrés distincts). Donc \mathcal{B}_H . D'où,

$$\mathcal{B}_H = (X - 2, X^2 - 4) \text{ est une base de } H.$$

En particulier,

$$\dim(H) = \text{Card}(\mathcal{B}_H) = 2.$$

5. Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned} u(P) &= X(1 - X)P' + 2XP \\ &= X(1 - X)(2a_2X + a_1) + 2X(a_2X^2 + a_1X + a_0) \\ &= (X - X^2)(2a_2X + a_1) + 2a_2X^3 + 2a_1X^2 + 2a_0X \\ &= (a_1 + 2a_2)X^2 + (2a_0 + a_1)X. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$u(P) = (a_1 + 2a_2)X^2 + (2a_0 + a_1)X.$$

6. Soit $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$. Par la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in F_0 &\Leftrightarrow u(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow (a_1 + 2a_2)X^2 + (2a_0 + a_1)X = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_0 + a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2}a_1 \\ a_0 = -\frac{1}{2}a_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = -\frac{1}{2}a_1X^2 + a_1X - \frac{1}{2}a_1 = -\frac{1}{2}a_1(X^2 - 2X + 1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_0 = \text{Vect} \left((X - 1)^2 \right).$$

Posons $\mathcal{B}_0 = \left((X - 1)^2 \right)$. \mathcal{B}_0 est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. De plus \mathcal{B}_0 engendre F_0 donc

$$\boxed{\mathcal{B}_0 \text{ est une base de } F_0.}$$

En particulier,

$$\boxed{\dim(F_0) = \text{Card}(\mathcal{B}_0) = 1.}$$

7. De même, pour $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$, on a

$$\begin{aligned} P \in F_1 &\Leftrightarrow (a_1 + 2a_2)X^2 + (2a_0 + a_1)X = a_2X^2 + a_1X + a_0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = a_2 \\ 2a_0 + a_1 = a_1 \\ 0 = a_0 \end{cases} && \text{par unicité des coefficients} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -a_1 \\ a_0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = a_1(-X^2 + X). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_1 = \text{Vect}(X^2 - X).$$

Posons $\mathcal{B}_1 = (X^2 - X)$. \mathcal{B}_1 est constitué d'un seul vecteur non nul, donc \mathcal{B}_1 est libre et engendre F_1 donc

$$\boxed{(X^2 - X) \text{ est une base de } F_1 \text{ et } \dim(F_1) = \text{Card}(\mathcal{B}_1) = 1.}$$

Enfin, avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned} P \in F_2 &\Leftrightarrow (a_1 + 2a_2)X^2 + (2a_0 + a_1)X = 2a_2X^2 + 2a_1X + 2a_0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 2a_2 \\ 2a_0 + a_1 = 2a_1 \\ 0 = a_0 \end{cases} && \text{par unicité des coefficients} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = a_2X^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(X^2) \text{ est une base de } F_2 \text{ et } \dim(F_2) = 1.}$$

8. Montrons que F_0 et H sont supplémentaires. On a les deux points suivants.

- Par les questions précédentes, $\dim(F_0) + \dim(H) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
- Montrons que $F_0 \cap H = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in F_0 \cap H &\Leftrightarrow \begin{cases} P \in \text{Vect} \left((X - 1)^2 \right) \\ P(2) = 0 \end{cases} && \text{d'après la question 6.} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, P = \lambda(X - 1)^2 \\ P(2) = \lambda = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}. \end{aligned}$$

D'où $F_0 \cap H = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

Conclusion, par les deux points précédents,

$$\boxed{F_0 \text{ et } H \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_2[X].}$$

9. Par les questions précédentes,

$$G = F_1 + F_2 = \text{Vect}(X^2 - X) + \text{Vect}(X) = \text{Vect}(X^2 - X, X).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$G = \text{Vect}(X^2, X) \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

La famille $\mathcal{B}_G = (X^2, X)$ est libre (en tant que sous-famille de la base canonique ou famille de deux vecteurs non colinéaires ou famille de polynômes de degrés distincts) et engendre G . Donc

$$\boxed{\mathcal{B}_G = (X^2, X) \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = \text{Card}(\mathcal{B}_G) = 2.}$$

10. On observe les deux points suivants.

- Par les questions précédentes, $\dim(F_0) + \dim(G) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
- D'autre part,

$$F_0 + G = \text{Vect}((X-1)^2) + \text{Vect}(X^2, X) = \text{Vect}((X-1)^2, X^2, X).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} F_0 + G &= \text{Vect}(X^2 - 2X + 1, X^2, X) \\ &= \text{Vect}(1, X^2, X) \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + 2C_3 \\ &= \mathbb{R}_2[X] \quad \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

Par les deux points précédents, on en déduit que

$$\boxed{\text{Les espaces } F_0 \text{ et } G \text{ sont supplémentaires.}}$$

11. On a vu précédemment que $X - 2 \in H$. Montrons que $X - 2 \notin G$. Par l'absurde. Supposons $X - 2 \in G = \text{Vect}(X^2, X)$. Alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X - 2 = aX^2 + bX.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, $a = 0$, $a = 1$ et $-2 = 0$ ce qui est absurde. Donc $X - 2 \notin G$. Conclusion,

$$\boxed{G \neq H.}$$

G et H sont deux supplémentaires distincts de F_0 .

12. (a) Par définition, pour $n = 2$, on a

$$\mathcal{B} = (X^0(1-X)^2, X^1(1-X)^1, X^2(1-X)^0) = ((1-X)^2, X(1-X), X^2).$$

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a(1-X)^2 + bX(1-X) + cX^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

On pourrait tout développer, utiliser l'unicité des coefficients et résoudre le petit système. Faisons autrement. Notamment, en évaluant en 0, $a = 0$. Donc

$$bX(1-X) + cX^2 = 0.$$

En évaluant en 1, $c = 0$. Donc $bX(1-X) = 0$. Or $X(1-X)$ n'est pas le polynôme nul. D'où, $b = 0$. Ainsi, $a = b = c = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} = (B_0, B_1, B_2) \text{ est libre.}}$$

(b) On a les deux points suivants.

- \mathcal{B} est libre par la question précédente.
- $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

13. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang, donc

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathcal{B}) &= \text{rg}\left((1-X)^2, X(1-X), X^2\right) \\ &= \text{rg}\left(1-2X+X^2, X-X^2, X^2\right) \\ &= \text{rg}\left(1-2X, X, X^2\right) \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \end{array} \\ &= \text{rg}\left(1, X, X^2\right) \quad C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2. \end{aligned}$$

On reconnaît la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de rang 3. Donc

$$\boxed{\text{rg}(\mathcal{B}) = 3.}$$

Donc on observe que $\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

On suppose pour le reste du problème que $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Partie 3 : La dimension de F_k

On fixe $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

14. Soit $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a

$$B'_p = (X^p(1-X)^{n-p})' = pX^{p-1}(1-X)^{n-p} - (n-p)X^p(1-X)^{n-p-1}.$$

Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} B_p \in F_k &\Leftrightarrow X(1-X)B'_p + nXB_p = kB_p \\ &\Leftrightarrow X(1-X)\left(pX^{p-1}(1-X)^{n-p} - (n-p)X^p(1-X)^{n-p-1}\right) \\ &\quad + nX(X^p(1-X)^{n-p}) = k(X^p(1-X)^{n-p}) \\ &\Leftrightarrow pX^p(1-X)^{n-p+1} - (n-p)X^{p+1}(1-X)^{n-p} \\ &\quad + nX^{p+1}(1-X)^{n-p} = kX^p(1-X)^{n-p} \quad (\star) \end{aligned}$$

On note que si $p = 0$, on a $B_0 = (1-X)^n$ donc $B'_0 = -n(1-X)^{n-1}$ et par suite,

$$B_0 \in F_k \Leftrightarrow -nX(1-X)^n + nX(1-X)^n = k(1-X)^n.$$

On retrouve bien (\star) . De même si $p = n$, $B_n = X^n$, $B'_n = nX^{n-1}$ et

$$B_n \in F_k \Leftrightarrow nX^n(1-X) + nX^{n+1} = kX^n.$$

On retrouve encore (\star) . Ainsi, pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, en simplifiant par $X^p(1-X)^{n-p}$,

$$\begin{aligned} B_p \in F_k &\Leftrightarrow (\star) \\ &\Leftrightarrow p(1-X) - (n-p)X + nX = k \\ &\Leftrightarrow p = k. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad (B_p \in F_k \Leftrightarrow p = k).}$$

15. Par la question précédente, on a $B_k \in F_k$. Donc $\text{Vect}(B_k) \subset F_k$. Ces espaces étant de dimensions finies (car ce sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}_n[X]$ lui même de dimension finie), on a

$$\dim(\text{Vect}(B_k)) \leq \dim(F_k).$$

Or (B_k) est une famille libre car $B_k \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et (B_k) engendre $\text{Vect}(B_k)$. Donc (B_k) est une base de $\text{Vect}(B_k)$. Ainsi,

$$1 = \dim(\text{Vect}(B_k)) \leq \dim(F_k).$$

D'autre part, par définition, $F_k \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\dim(F_k) \leq \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$. Cependant, $F_k \neq \mathbb{R}_n[X]$, car par la question précédente, on a par exemple $B_0 \notin F_k$ (ou pour $k = 0$, on a $B_n \notin F_0$). Donc $\dim(F_k) \neq \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Ainsi,

$$\dim(F_k) < \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{1 \leq \dim(F_k) \leq n.}$$

16. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$P \in H \quad \Leftrightarrow \quad P(2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X - 2 \text{ divise } P \quad \Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = (X - 2)Q.$$

Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ i.e. $\deg(P) \leq n$. Donc $\deg((X - 2)Q) = 1 + \deg(Q) \leq n$ i.e. $\deg(Q) \leq n - 1$ ou encore $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Réciproquement, si $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P = (X - 2)Q$, alors, on a bien $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(2) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{H = \{(X - 2)Q \mid Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}.}$$

17. Par la question précédente, on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned} H &= \{(X - 2)Q \mid Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} \\ &= \{(X - 2)(a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}) \mid (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{a_0(X - 2) + a_1X(X - 2) + \dots + a_{n-1}X^{n-1}(X - 2) \mid (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \text{Vect}(\underbrace{X - 2, X(X - 2), \dots, X^{n-1}(X - 2)}_{=\mathcal{B}_H}). \end{aligned}$$

La famille \mathcal{B}_H engendre H . De plus, \mathcal{B}_H est constituée de polynômes de degrés distincts. Donc \mathcal{B}_H est libre. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{B}_H = (X - 2, X(X - 2), \dots, X^{n-1}(X - 2)) \text{ est une base de } H.}$$

En particulier,

$$\boxed{\dim(H) = \text{Card}(\mathcal{B}_H) = n.}$$

18. Soit $P \in F_k \cap H$. Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Puisque $P \in H$ alors $P(2) = 0$ et donc 2 est une racine de P de multiplicité $d \geq 1$. On a alors $P = (X - 2)^d Q$ avec $Q(2) \neq 0$. Par suite $P' = d(X - 2)^{d-1} Q + (X - 2)^d Q'$. Or $P \in F_k$ donc

$$\begin{aligned} X(1 - X)P' + nXP &= kP \\ \Rightarrow X(1 - X)d(X - 2)^{d-1}Q + X(1 - X)(X - 2)^d Q' + nX(X - 2)^d Q &= k(X - 2)^d Q \\ \Rightarrow dX(1 - X)Q + X(1 - X)(X - 2)Q' + nX(X - 2)Q &= kQ \end{aligned}$$

En évaluant en 2,

$$-2dQ(2) = kQ(2) \quad \Leftrightarrow \quad -2d = k \quad \text{car } Q(2) \neq 0.$$

Or $-2d \leq -2$ et $k \geq 0$ ce qui est impossible. Donc si $P \in F_k \cap H$, alors $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. La réciproque étant aussi vraie, on en déduit que $F_k \cap H = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Conclusion,

$$\boxed{F_k \text{ et } H \text{ sont en somme directe.}}$$

19. Par la question précédente, on en déduit que

$$\dim(F_k) + \dim(H) = \dim(F_k + H).$$

Or $F_k + H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(F_k + H) \leq n + 1$. D'autre part, on a vu que $\dim(H) = n$. Ainsi,

$$\dim(F_k) + n \leq n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dim(F_k) \leq 1.$$

Or par la question 15. $\dim(F_k) \geq 1$. Conclusion,

$$\boxed{\dim(F_k) = 1.}$$

On a les deux points suivants.

- Par la question précédente, $F_k \oplus H$.
- $\dim(F_k) = 1$ et $\dim(H) = n$. Donc $\dim(F_k) + \dim(H) = 1 + n = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

Conclusion,

$$\boxed{F_k \text{ et } H \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_n[X].}$$

20. On a vu que B_k est un vecteur non nul de F_k . Donc (B_k) est une famille libre de F_k . De plus, $\dim(F_k) = 1 = \text{Card}((B_k))$. Conclusion,

$$\boxed{(B_k) \text{ est une base de } F_k.}$$

Partie 4 : Une base adaptée

21. Soient $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, $i \neq j$. Montrons que F_i et F_j sont en somme directe. Soit $P \in F_i \cap F_j$. Alors,

$$\begin{aligned} iP = X(1-X)P' + nXP = jP &\Rightarrow iP = jP \\ &\Rightarrow (i-j)P = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ car } i \neq j. \end{aligned}$$

Donc $F_i \cap F_j \subset \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Or $\{0_{\mathbb{R}[X]}\} \subset F_i \cap F_j$ car F_i et F_j sont des sous-espaces vectoriels. Donc

$$F_i \cap F_j = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2, i \neq j, F_i \text{ et } F_j \text{ sont en somme directe.}}$$

22. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^p \lambda_k B_k$. Posons pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$\mathcal{P}(p) : \quad \ll S_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0; p \rrbracket, \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}. \gg$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $p = 0$. Alors $S_0 = \lambda_0 B_0 = \lambda_0 (1-X)^n$. Dès lors,

$$S_0 = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 (1-X)^n = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_0 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité. Soit $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(p+1)$. Par définition, on a

$$S_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \lambda_k B_k = \sum_{k=0}^p \lambda_k B_k + \lambda_{p+1} B_{p+1} = \sum_{k=0}^p \lambda_k X^k (1-X)^{n-k} + \lambda_{p+1} X^{p+1} (1-X)^{n-p-1}.$$

Supposons $S_{p+1} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Alors,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p \lambda_k X^k (1-X)^{n-k} + \lambda_{p+1} X^{p+1} (1-X)^{n-p-1} = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \\ \Rightarrow & \sum_{k=0}^p \lambda_k X^k (1-X)^{n-k-(n-p-1)} + \lambda_{p+1} X^{p+1} = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \\ \Rightarrow & \sum_{k=0}^p \lambda_k X^k (1-X)^{p-k+1} + \lambda_{p+1} X^{p+1} = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$, on a $p-k+1 > 0$. Donc en évaluant en 1, $\lambda_k 1^k (1-1)^{p-k+1} = 0$. Ainsi, en évaluant en 1,

$$0 + \lambda_{p+1} = 0.$$

D'où

$$0_{\mathbb{R}[X]} = \sum_{k=0}^p \lambda_k X^k (1-X)^{n-k} = S_p.$$

Or on a supposé $\mathcal{P}(p)$. Donc par hypothèse de récurrence,

$$\forall k \in \llbracket 0; p \rrbracket, \quad \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$

Globalement, $\forall k \in \llbracket 0; p+1 \rrbracket$, $\lambda_k = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $\mathcal{P}(p+1)$.

Conclusion. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad (S_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0; p \rrbracket, \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}).$$

23. Par la question précédente, en prenant $p = n$,

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k B_k = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathcal{B} = (B_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est libre. Or $\text{Card}(\mathcal{B}) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Problème II - Séries numériques

L'objectif de ce problème est de préciser le comportement asymptotique de $n!$:

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \gamma n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

Partie 1 : Harmonique un jour...

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $b_n = a_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln(k)].$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

Or $\ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = \ln(n+1) \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \text{ diverge.}$$

2. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} b_n &= a_n - \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2n^2} < 0$. Donc par la question précédente, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{-1}{2n^2}$ sont de même nature. Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{-1}{2n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Conclusion,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n \text{ converge.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition,

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \left(a_k - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Donc par la question 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n b_k = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

5. Par la question 3. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n$ converge. Notons $C_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ sa somme totale i.e. sa limite, alors :

$$\sum_{k=1}^n b_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} C_1 + o(1).$$

Donc par la question précédente,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n b_k = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^n b_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + o(1) + C_1 + o(1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists C_1 \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + C_1 + o(1).}$$

Partie 2 : Somme de logarithmes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n)$ et $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

6. Puisque $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge grossièrement et donc notamment diverge. De même $((-1)^n \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0. Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$ diverge grossièrement donc diverge. Conclusion,

$$\boxed{(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n u_n \text{ divergent.}}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. La fonction $f : t \mapsto \ln(t)$ est continue et croissante sur \mathbb{R}_+^* . Donc par le théorème de comparaison série/intégrale, on a

$$\int_1^n \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^n u_k \leq \int_2^{n+1} \ln(t) dt.$$

Or

$$\int_1^n \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_{t=1}^{t=n} = n \ln(n) - n + 1.$$

De même

$$\int_2^{n+1} \ln(t) dt = (n+1) \ln(n+1) - (n+1) - 2 \ln(2) + 2 = (n+1) \ln(n+1) - n - 2 \ln(2) + 1.$$

Ainsi,

$$n \ln(n) - n + 1 \leq \sum_{k=2}^n u_k \leq (n+1) \ln(n+1) - n - 2 \ln(2) + 1.$$

Ou encore, puisque $u_1 = \ln(1) = 0$,

$$n \ln(n) - n + 1 \leq U_n = \sum_{k=1}^n u_k \leq (n+1) \ln(n+1) - n - 2 \ln(2) + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad n \ln(n) - n + 1 \leq U_n \leq (n+1) \ln(n+1) - n + 1 - 2 \ln(2).}$$

8. Puisque $1 \ll_{n \rightarrow +\infty} -n \ll_{n \rightarrow +\infty} n \ln(n)$, on en déduit que

$$n \ln(n) - n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 (n+1) \ln(n+1) - n - 2 \ln(2) + 1 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (n+1) \ln(n) + (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n + 1 - 2 \ln(2) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) + \ln(n) + (n+1) o(1) - n + 1 - 2 \ln(2) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) + o(n \ln(n)) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n).
 \end{aligned}$$

Donc par la question précédente et le théorème d'encadrement des équivalents, on en conclut que

$$\boxed{U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n).}$$

Partie 3 : Soyons plus précis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $v_n = \int_{n-1}^n \ln(n) - \ln(t) dt$ et $V_n = \sum_{k=2}^n v_k$.

9. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $t \in [n-1; n[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* donc continue sur $]t; n[\subset [n-1; n[\subset [1; +\infty[$ et dérivable sur $]t; n[$ (non vide car $t < n$). Donc par l'identité des accroissements finis, il existe $c_{n,t} \in]t; n[$ tel que

$$\frac{\ln(n) - \ln(t)}{n - t} = \frac{1}{c_{n,t}}.$$

Or $c_{n,t} \in]t; n[\subset [n-1; n]$. Donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{c_{n,t}} \leq \frac{1}{n-1}$. Ainsi,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n) - \ln(t)}{n - t} \leq \frac{1}{n-1}.$$

Or $n - t > 0$ donc

$$\frac{n - t}{n} \leq \ln(n) - \ln(t) \leq \frac{n - t}{n-1}.$$

On note que l'inégalité reste vraie si $t = n$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \forall t \in [n-1; n], \quad \frac{n-t}{n} \leq \ln(n) - \ln(t) \leq \frac{n-t}{n-1}.}$$

11. Soit $n \geq 2$. Par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens ($n \geq n-1$), on a

$$\int_{n-1}^n \frac{n-t}{n} dt \leq \int_{n-1}^n \ln(n) - \ln(t) dt \leq \int_{n-1}^n \frac{n-t}{n-1} dt.$$

Or

$$\int_{n-1}^n n - t dt = n(n - (n-1)) - \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=n-1}^{t=n} = n - \frac{n^2}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} = \frac{2n - n^2 + n^2 - 2n + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{2n} \leq v_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.}$$

12. Par la question précédente, on a

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq \frac{1}{2n} \leq v_n.$$

Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leq 1$). Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{(V_n)_{n \geq 2} \text{ diverge.}}$$

13. Par la question 11. pour tout $n \geq 2$ on a

$$0 \leq v_n - \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2n} = \frac{n - (n-1)}{2n(n-1)} = \frac{1}{2n(n-1)}.$$

Or $\frac{1}{2n(n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} > 0$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2n(n-1)}$ converge également. Ainsi, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{n \geq 2} \left(v_n - \frac{1}{2n} \right) \text{ converge.}}$$

On note S sa somme totale.

14. On a vu à la question précédente que pour tout $n \geq 2$, $v_n - \frac{1}{2n} \geq 0$. Donc pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq \left| \cos(n) \left(v_n - \frac{1}{2n} \right) \right| \leq v_n - \frac{1}{2n}.$$

On sait également, toujours par la question précédente que $\sum_{n \geq 2} \left(v_n - \frac{1}{2n} \right)$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 2} \left| \cos(n) \left(v_n - \frac{1}{2n} \right) \right| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\sum_{n \geq 2} \cos(n) \left(v_n - \frac{1}{2n} \right)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n \geq 2} \cos(n) \left(v_n - \frac{1}{2n} \right) \text{ converge.}}$$

15. Par la question 13.

$$\sum_{k=2}^n \left(v_k - \frac{1}{2k} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} S + o(1) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=2}^n v_k - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} S + o(1).$$

Par la question 5.

$$\sum_{k=2}^n v_k - \frac{1}{2} (\ln(n) + C_1 + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} S + o(1) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=2}^n v_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + \frac{C_1}{2} + S + o(1).$$

Conclusion, en posant $C_2 = \frac{C_1}{2} + S$, on obtient que

$$\boxed{V_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + C_2 + o(1).}$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On a par définition, pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$,

$$v_k = \int_{k-1}^k \ln(k) - \ln(t) dt = \ln(k) - \int_{k-1}^k \ln(t) dt$$

Donc en sommant,

$$V_n = \sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n \ln(k) - \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(t) dt = U_n - 0 - \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(t) dt.$$

Par la relation de Chasles,

$$V_n = U_n - \int_1^n \ln(t) dt = U_n - [t \ln(t) - t]_{t=1}^{t=n} = U_n - n \ln(n) + n - 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad V_n = U_n - n \ln(n) + n - 1.}$$

17. Par la question précédente,

$$\forall n \geq 2, \quad U_n = V_n + n \ln(n) - n + 1.$$

Donc par la question 15.

$$U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + C_2 + o(1) + n \ln(n) - n + 1.$$

Posons $C_3 = C_2 + 1$. Dès lors,

$$\boxed{U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + C_3 + o(1).}$$

Partie 4 : Il est temps de conclure

18. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = n^2$ et $\beta_n = n^2 + n$. Alors, on a bien

$$\beta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 = \alpha_n.$$

Pourtant,

$$\frac{e^{\beta_n}}{e^{\alpha_n}} = \frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $e^{\alpha_n} \ll_{n \rightarrow +\infty} e^{\beta_n}$. En particulier, $(e^{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e^{\beta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas équivalentes au voisinage de $+\infty$. On a donc trouvé un exemple pour lequel on a

$$\left(\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta_n \right) \text{ ET } \text{non} \left(e^{\alpha_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\beta_n} \right)$$

Conclusion,

$$\boxed{\left[\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta_n \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\beta_n} \right] \text{ est fautive en général.}}$$

19. Pour tout $k \geq 2$, $\ln(k) > 0$ donc pour tout $n \geq 2$, $U_n = \sum_{k=1}^n \ln(k) > 0$.

Pour tout $n \geq 2$, on a

$$U_n = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln \left(\prod_{k=1}^n k \right) = \ln(n!).$$

Ainsi,

$$n! = e^{U_n}.$$

Par la question 17., sans passer aux équivalents, la question précédente nous ayant dissuadé de le faire, on a

$$\begin{aligned} n! &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + C_3 + o(1)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n \ln(n)} e^{-n} e^{\frac{\ln(n)}{2}} e^{C_3} e^{o(1)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C_3} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Posons $\gamma = e^{C_3} \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, on applaudit Stirling et sa formule :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \gamma n^n e^{-n} \sqrt{n}$$



NB : avec les intégrales de Wallis, il est même possible de montrer que $\gamma = \sqrt{2\pi}$. La beauté des mathématiques n'a pas de fin.

Problème III - Applications linéaires

On souhaite démontrer dans ce problème que si E est un espace vectoriel de dimension infinie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k) = E$.

Partie 1 : Un exemple dans \mathbb{R}^3

On pose dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et on définit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{bmatrix}.$$

1. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 4(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + 5(\lambda z + \mu z') \\ -2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') \\ -4(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - 5(\lambda z + \mu z') \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 4x' - y' + 5z' \\ -2x' - y' - z' \\ -4x' + y' - 5z' \end{bmatrix} \\ &= \lambda f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + \mu f\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

On en déduit bien que f est linéaire.

2. (a) On note $(e_1, e_2, e_3) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On a alors,

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_2 \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 5C_1 \end{array} \\ &= \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=\mathcal{B}_I}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow -C_1 \\ C_2 \leftarrow \frac{-1}{6}C_2 \end{array} \end{aligned}$$

La famille \mathcal{B}_I engendre $\text{Im}(f)$. De plus les vecteurs de \mathcal{B}_I ne sont pas colinéaires donc \mathcal{B}_I est libre. Conclusion,

$$\mathcal{B}_I = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \text{Im}(f)$$

et

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{Card}(\mathcal{B}_{\text{Im}(f)}) = 2.$$

(b) On pose $u = (-1, 1, 1)$. On a

$$f(u) = \begin{bmatrix} -4 - 1 + 5 \\ 2 - 1 - 1 \\ 4 + 1 - 5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}.$$

Par conséquent, on a bien $u \in \text{Ker}(f)$.

- (c) « Le théorème du rang, c'est puissant » verset 1, livre 1. On a vu à la question 1 que $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = 2$. Donc par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{espace de départ}}}{\dim(\mathbb{R}^3)} - \text{rg}(f) = 3 - 2 = 1.$$

Or d'après la question précédente, $u \in \text{Ker}(f)$ avec $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ il constitue donc une base de $\text{Ker}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ et } \dim(\text{Ker}(f)) = 1.}$$

- (d) D'après les questions précédentes, \mathcal{B}_I est une base de $\text{Im}(f)$ et $\mathcal{B}_K = (u)$ est une base de $\text{Ker}(f)$. Donc

$$\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \text{Vect}(\mathcal{B}_{\text{Im}(f)}, u) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Im}(f) \end{aligned}$$

On constate donc que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$, car en particulier, $\dim(\text{Im}(f)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{les espaces } \text{Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ ne sont pas supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

3. (a) On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z) &= f \left(\begin{bmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 4(4x - y + 5z) - (-2x - y - z) + 5(-4x + y - 5z) \\ -2(4x - y + 5z) - (-2x - y - z) - (-4x + y - 5z) \\ -4(4x - y + 5z) + (-2x - y - z) - 5(-4x + y - 5z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f^2(x, y, z) = \begin{bmatrix} -2x + 2y - 4z \\ -2x + 2y - 4z \\ 2x - 2y + 4z \end{bmatrix}.}$$

- (b) A l'aide de la question précédente, on remarque que

$$\text{Im}(f^2) = \left\{ (-2x + 2y - 4z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

Le vecteur $(1, 1, -1)$ engendre $\text{Im}(f^2)$ et est un vecteur non nul et constitue donc une famille libre et donc une base de $\text{Im}(f^2)$. Conclusion,

$$\text{une base de } \text{Im}(f^2) \text{ est } \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \text{ et } \text{rg}(f^2) = \dim(\text{Im}(f^2)) = 1.$$

(c) On sait à l'aide de la question précédente et du théorème du rang que $\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im}(f^2)) = 3 - 1 = 2$. Déterminons-en une base. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f^2) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2x + 2y - 4z \\ -2x + 2y - 4z \\ 2x - 2y + 4z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow -2x + 2y - 4z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y - 2z. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{Ker}(f^2) = \left\{ \begin{bmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}}_{=\mathcal{B}_{K2}} \right).$$

La famille \mathcal{B}_{K2} engendre $\text{Ker}(f^2)$. De plus \mathcal{B}_{K2} est constituée de deux vecteurs non colinéaires. Donc \mathcal{B}_{K2} est libre et est donc une base de $\text{Ker}(f^2)$. Conclusion,

$$\mathcal{B}_{K2} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Ker}(f^2) \text{ et } \dim(\text{Ker}(f^2)) = 2.$$

(d) Plusieurs méthodes. On peut démontrer que les deux espaces sont supplémentaires par concaténation des bases. Montrons ici que leur intersection est réduite au vecteur nul. Soit $v \in \text{Ker}(f^2) \cap \text{Im}(f^2)$. Puisque $v \in \text{Im}(f^2)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda(1, 1, -1)$, d'après la question 3.b. De même d'après la question 3.c, on en déduit qu'il existe $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = \mu(1, 1, 0) + \nu(-2, 0, 1) = (\mu - 2\nu, \mu, \nu)$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 2\nu \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \mu - 2\nu \\ \lambda = \mu \\ \lambda = -\nu \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda = 0 \\ \mu = \lambda \\ \nu = -\lambda \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - 2L_3. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda = \mu = \nu = 0$ et donc $v = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi $\text{Ker}(f^2) \cap \text{Im}(f^2) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Or à l'aide du théorème du rang (ou des dimensions précédemment établies), on a

$$\dim(\text{Ker}(f^2)) + \dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Donc par la caractérisation des espaces supplémentaires à l'aide de la dimension, on en déduit que

$$\text{Ker}(f^2) \oplus \text{Im}(f^2) = \mathbb{R}^3.$$

Partie 2 : Généralités en dimension quelconque

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de f .

4. Soit $f \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, on sait d'après le cours que $f^k \in GL(E)$. Notamment f^k est injective et donc $\text{Ker}(f^k) = \{0_E\}$. De plus f^k est surjective donc $\text{Im}(f^k) = E$. Conclusion,

$$E = E \oplus \{0_E\} = \text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k).$$

Dans la suite f est un endomorphisme quelconque (non nécessairement bijectif).

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$. Soit $y \in \text{Im}(f^{k+1})$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$. Par conséquence, y est l'image de $f(x)$ par f^k et donc $y \in \text{Im}(f^k)$. Conclusion,

$$\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k).$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$. Soit $x \in \text{Ker}(f^k)$. Alors $f^k(x) = 0_E$ en donc en composant par f , $f^{k+1}(x) = f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire. Donc $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$. Conclusion

$$\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1}).$$

7. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$.

- (a) Soit $x \in E$ tel que $f(x) \in \text{Ker}(f^{p+1})$. Par hypothèse $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$ donc $f(x) \in \text{Ker}(f^p)$ i.e. $f^p(f(x)) = 0_E$ et donc $f^{p+1}(x) = 0_E$. Dès lors, $x \in \text{Ker}(f^{p+1}) = \text{Ker}(f^p)$. Ainsi, on a bien

$$x \in \text{Ker}(f^p).$$

- (b) D'après la question 6., pour $k = p + 2$, on a $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1}) \subset \text{Ker}(f^{p+2})$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \text{Ker}(f^{p+2})$ alors $f^{p+2}(x) = 0_E$ i.e. $f^{p+1}(f(x)) = 0_E$ et donc $f(x) \in \text{Ker}(f^{p+1})$. Donc d'après la question précédente, $x \in \text{Ker}(f^p)$. On a donc l'inclusion réciproque $\text{Ker}(f^{p+2}) \subset \text{Ker}(f^p)$. Conclusion,

$$\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+2}).$$

- (c) On pose pour tout $k \geq p + 1$, la propriété $\mathcal{P}(k) : \ll \forall i \in \llbracket p + 1; k \rrbracket, \text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^p) \gg$. Montrons que pour tout $k \geq p + 1$ la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Initialisation. Si $k = p + 1$, alors pour tout $i \in \llbracket p + 1; k \rrbracket = \{p + 1\}$ on a bien par hypothèse $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^p)$ et donc $\mathcal{P}(p + 1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \geq p + 1$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie. On sait que pour tout $i \in \llbracket p + 1; k \rrbracket$, on a $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^p)$. Prenons $i = k - 1$. Si $k - 1 \geq p + 1$, par hypothèse de récurrence, $\text{Ker}(f^{k-1}) = \text{Ker}(f^p)$. Si $k - 1 = p$ l'égalité reste aussi vraie. Or, par l'hypothèse de récurrence, on sait aussi que $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$. Donc $\text{Ker}(f^{k-1}) = \text{Ker}(f^k)$. En utilisant la question 7.b, on en déduit que $\text{Ker}(f^{k-1}) = \text{Ker}(f^{k+1})$. Et donc $\text{Ker}(f^{k+1}) = \text{Ker}(f^p)$. Rappelons que par hypothèse de récurrence nous savions que pour tout $i \in \llbracket p + 1; k \rrbracket$, on a $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^p)$ et donc au bilan, on a pour tout $i \in \llbracket p + 1; k + 1 \rrbracket$, on a $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^p)$ i.e. $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geq p + 1$ et donc pour tout $k \geq p + 1$, $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$, ce qui reste vraie si $k = p$. Conclusion, pour tout $k \geq p$,

$$\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p).$$

Partie 3 : Résolution en dimension finie

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel de dimension finie et on note $n = \dim(E)$ sa dimension. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \text{rg}(f^k).$$

8. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a montré dans la question 5. que $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$. On en déduit que

$$u_{k+1} = \text{rg}(f^{k+1}) = \dim(\text{Im}(f^{k+1})) \leq \dim(\text{Im}(f^k)) = u_k.$$

On a donc montré que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante. De plus par définition du rang, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ $u_k \geq 0$. Conclusion,

$$(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante et minorée par } 0.$$

- (b) La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et à valeurs dans \mathbb{N} . Nécessairement

$$\text{cette suite stationne à partir d'un certain rang.}$$

Pour les sceptiques (rigoureux ? puristes ?) : procédons par l'absurde. Supposons que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne stationne pas. Cela revient à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geq n$ tel que $u_m \neq u_n$ et donc par décroissance de la suite $u_m < u_n$. On peut ainsi construire une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui soit strictement décroissante. Pour $n = 1$, il existe $\varphi(1) \geq 2$ tel que $u_{\varphi(1)} < u_1$. Puis il existe $\varphi(2) \geq \varphi(1) + 1$ tel que $u_{\varphi(2)} < u_{\varphi(1)}$ et ainsi de proche en proche (ou par récurrence) on construit une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante. La suite étant à valeurs dans \mathbb{N} , on montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} < u_1 - n$ (chaque décroissance entraîne un saut d'au moins 1) et donc à partir d'un certain rang, $u_{\varphi(n)} < 0$ ce qui contredit le fait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ a fortiori est à valeurs dans \mathbb{N} .

On pose p le premier indice à partir duquel $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ stationne. On appelle alors p l'indice de f .

9. Par définition de p , on a pour tout $k \geq p$, $u_k = u_p$. Donc par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(f^p)) = \dim(E) - \text{rg}(f^p) = n - u_p = n - u_k = \dim(E) - \text{rg}(f^k) = \dim(\text{Ker}(f^k)).$$

Or nous avons montré dans la question 6. que pour tout $k \geq p$, $\text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f^{p+1}) \subset \text{Ker}(f^{p+2}) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^k)$. Donc par égalité des dimensions, on en déduit que pour tout $k \geq p$

$$\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p).$$

Soit $x \in \text{Ker}(f^p) \cap \text{Im}(f^p)$. Alors on a d'une part $f^p(x) = 0_E$ et d'autre part il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Par conséquent, $f^{2p}(y) = f^p(f^p(y)) = f^p(x) = 0_E$. On en déduit que $y \in \text{Ker}(f^{2p})$. Or par ce qui précède avec $k = 2p$, on a $\text{Ker}(f^{2p}) = \text{Ker}(f^p)$. Donc $y \in \text{Ker}(f^p)$ i.e. $f^p(y) = 0_E$. On en déduit donc que $x = f^p(y) = 0_E$. Par suite $\text{Ker}(f^p) \cap \text{Im}(f^p) = \{0_E\}$. Conclusion,

$$\text{les espaces } \text{Ker}(f^p) \text{ et } \text{Im}(f^p) \text{ sont en somme directe.}$$

10. Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Ker}(f^p)) + \dim(\text{Im}(f^p)) = \dim(E).$$

Or nous avons montré dans la question précédente que $\text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p)$. Donc par la caractérisation des espaces supplémentaires à l'aide de la dimension, on en déduit que

$$\dim(\text{Ker}(f^p)) \oplus \dim(\text{Im}(f^p)) = \dim(E).$$

11. (a) Soit $y \in \text{Im}(f^p)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f^p(x)$. D'après la question précédente, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(f^p) \times \text{Im}(f^p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Donc par linéarité de f^p ,

$$y = f^p(x) = f^p(x_1) + f^p(x_2) = 0_E + f^p(x_2) \quad \text{car } x_1 \in \text{Ker}(f^p).$$

De plus $x_2 \in \text{Im}(f^p)$, donc il existe $x_3 \in E$ tel que $x_2 = f^p(x_3)$. Ainsi $y = f^p(x_2) = f^p(f^p(x_3)) = f^{2p}(x_3)$. Conclusion $y \in \text{Im}(f^{2p})$.

- (b) Soit $y \in \text{Im}(f^p)$. Alors par la question précédente, $y \in \text{Im}(f^{2p})$. Or d'après la question B.2 et une petite récurrence, on a $\text{Im}(f^{2p}) \subset \text{Im}(f^{2p-1}) \subset \dots \subset \text{Im}(f^{p+1})$. On suppose $p \neq 0$ sinon cela signifie que $f = f^1 = f^0 = \text{Id}_E$ et dans ce cas la conclusion est immédiate. Donc $y \in \text{Im}(f^{p+1})$. On a donc montré que

$$\text{Im}(f^p) \subset \text{Im}(f^{p+1}).$$

Réciproquement toujours par la question B.2, on a $\text{Im}(f^{p+1}) \subset \text{Im}(f^p)$. Conclusion,

$$\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1}).$$

NB : cette égalité pouvait s'obtenir directement à l'aide de l'égalité $u_p = u_{p+1}$ et de l'inclusion obtenue en 5.