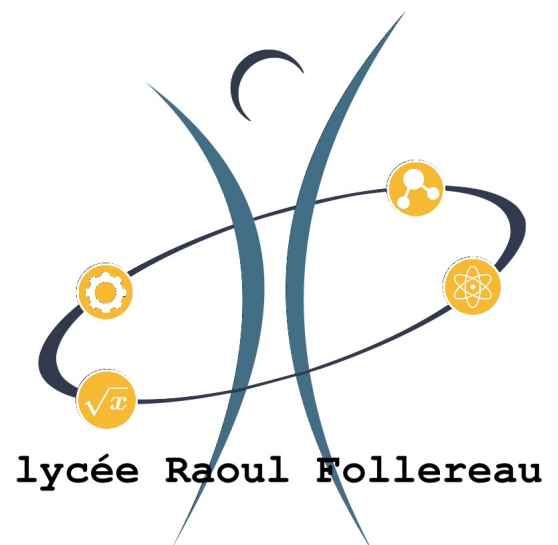


Epreuve de mathématiques 7

2025-2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numérotter les copies



Problème 1 - Espaces vectoriels et dimension

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit

$$u(P) = X(1 - X)P' + nXP.$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose

$$F_k = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid u(P) = kP\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid X(1 - X)P' + nXP = kP\}.$$

On définit également,

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad B_k = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

Enfin, on pose

$$H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(2) = 0\}.$$

L'objectif de ce problème est d'utiliser nos connaissances sur les espaces vectoriels pour déterminer les F_k .

Partie 1 : Généralités

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que F_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Rappeler \mathcal{B}_{can} la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie 2 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

4. Déterminer une base et la dimension de H .
5. Pour tout $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$, calculer $u(P)$.
6. Déterminer une base de F_0 et préciser sa dimension.
7. Même question pour F_1 et F_2 .
8. Montrer que F_0 et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
9. Déterminer une base et la dimension de $G = F_1 + F_2$.
10. Montrer que F_0 et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
11. A-t-on $G = H$? Justifier.
12. (a) Montrer que $\mathcal{B} = (B_0, B_1, B_2)$ est libre.
(b) Montrer que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
13. Retrouver le résultat de la question précédente, en calculant le rang de \mathcal{B} .

On suppose pour le reste du problème que $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Partie 3 : La dimension de F_k

On fixe $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

14. Montrer que pour $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $B_p \in F_k \Leftrightarrow p = k$.

15. Justifier que $1 \leq \dim(F_k) \leq n$.
16. Montrer que $H = \{(X-2)Q \mid Q \in E\}$ où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on précisera.
17. En déduire une base puis la dimension de H .
18. Montrer que F_k et H sont en somme directe. *On pourra procéder par l'absurde, supposer $P \in F_k \cap H$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et noter la multiplicité de 2 dans P .*
19. En déduire la dimension de F_k puis que F_k et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
20. Déterminer une base de F_k .

Partie 4 : Une base adaptée

21. Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, $i \neq j$, les espaces F_i et F_j sont en somme directe.
22. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^p \lambda_k B_k$. Démontrer par récurrence que pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$S_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \llbracket 0; p \rrbracket, \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$

23. En déduire que $\mathcal{B} = (B_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Problème 2 - Séries

L'objectif de ce problème est de préciser le comportement asymptotique de $n!$:

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+, \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \gamma n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

Partie 1 : Harmonique un jour...

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $b_n = a_n - \frac{1}{n}$.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme partielle $\sum_{k=1}^n a_k$ et en déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de b_n .
3. En déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^n b_k$ en fonction de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
5. En déduire qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + C_1 + o(1).$$

Partie 2 : Somme de logarithmes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n)$ et $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

6. Déterminer la nature de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que

$$n \ln(n) - n + 1 \leq U_n \leq (n + 1) \ln(n + 1) - n + 1 - 2 \ln(2).$$

8. En déduire un équivalent simple de U_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Partie 3 : Soyons plus précis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $v_n = \int_{n-1}^n \ln(n) - \ln(t) dt$ et $V_n = \sum_{k=2}^n v_k$.

9. Rappeler l'identité des accroissements finis.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que pour tout $t \in [n-1; n]$,

$$\frac{n-t}{n} \leq \ln(n) - \ln(t) \leq \frac{n-t}{n-1}.$$

11. En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{2n} \leq v_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

12. Déterminer la nature de $(V_n)_{n \geq 2}$.

13. Montrer que $\sum_{n \geq 2} \left(v_n - \frac{1}{2n} \right)$ converge. On note S sa somme totale.

14. Peut-on en déduire la nature de $\sum_{n \geq 2} \cos(n) \left(v_n - \frac{1}{2n} \right)$?

15. Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ que l'on exprimera en fonction de C_1 et S telle que

$$V_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + C_2 + o(1).$$

16. A l'aide de la définition de $(v_n)_{n \geq 2}$, montrer que

$$\forall n \geq 2, \quad V_n = U_n - n \ln(n) + n - 1.$$

17. En déduire qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + C_3 + o(1).$$

Partie 4 : Il est temps de conclure

18. Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques. Montrer que l'implication suivante est FAUSSE en général :

$$\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta_n \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\beta_n}.$$

19. Montrer que

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \gamma n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

Problème 3 - Applications linéaires

On souhaite démontrer dans ce problème que si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k) = E$.

Partie 1 : Un exemple dans \mathbb{R}^3

On pose dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et on définit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{bmatrix}.$$

- Démontrer que f est linéaire.
- Déterminer l'image de f . On en déterminera une base et on spécifiera sa dimension.
 - Vérifier que $(-1, 1, 1) \in \text{Ker}(f)$.
 - Avec le moins de calculs possibles, déterminer le noyau de f . On en déterminera une base et on spécifiera sa dimension.
 - Les espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?
- Calculer f^2 (on explicitera pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ son image par f^2).
 - Déterminer l'image de f^2 , en donner une base et sa dimension.
 - Déterminer le noyau de f^2 , en donner une base et sa dimension.
 - Les espaces $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

Partie 2 : Généralités en dimension quelconque

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de f .

- Si $f \in GL(E)$ montrer alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\text{Ker}(f^k) \oplus \text{Im}(f^k) = E$.

Dans la suite f est un endomorphisme quelconque (non nécessairement bijectif).

- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Im}(f^{k+1}) \subseteq \text{Im}(f^k)$.
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}(f^k) \subseteq \text{Ker}(f^{k+1})$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$.
 - Soit $x \in E$ tel que $f(x) \in \text{Ker}(f^{p+1})$. Montrer que $x \in \text{Ker}(f^p)$.
 - Montrer que $\text{Ker}(f^{p+2}) = \text{Ker}(f^p)$.
 - En déduire que pour tout $k \geq p$, $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$.

Partie 3 : Résolution en dimension finie

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel de dimension finie et on note $n = \dim(E)$ sa dimension. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \operatorname{rg}(f^k).$$

8. (a) Justifier que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée.
- (b) Montrer que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ stationne à partir d'un certain rang.

On pose p le premier indice à partir duquel $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ stationne. On appelle alors p l'**indice** de f .

9. Montrer que $\operatorname{Ker}(f^p)$ et $\operatorname{Im}(f^p)$ sont en somme directe.
10. En déduire par un argument de dimension que $\operatorname{Ker}(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p) = E$.
11. (a) Soit $y \in \operatorname{Im}(f^p)$. A l'aide de la question précédente, montrer que $y \in \operatorname{Im}(f^{2p})$.
- (b) En déduire que $\operatorname{Im}(f^p) = \operatorname{Im}(f^{p+1})$.