

Corrigé du Devoir Surveillé 6

Continuité et dérivabilité, suites, polynômes

Problème I - Polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence par $P_1 = X - 1$ et

$$\forall n \geq 1, \quad P_{n+1} = P_n + (n+1)X^n(X-1).$$

Partie 1 : Cas $n = 2$ et $n = 3$

1. Par construction,

$$P_2 = P_1 + 2X^1(X-1) = X-1 + 2X(X-1).$$

Donc d'une part,

$$P_2 = 2X^2 - X - 1.$$

D'autre part, en factorisant,

$$P_2 = (X-1)(1+2X) = 2\left(X + \frac{1}{2}\right)(X-1).$$

Conclusion,

$$P_2 = 2X^2 - X - 1 = 2\left(X + \frac{1}{2}\right)(X-1).$$

2. A l'aide de la question précédente, on a

$$P_3 = P_2 + 3X^2(X-1).$$

D'une part,

$$P_3 = 2X^2 - X - 1 + 3X^3 - 3X^2 = 3X^3 - X^2 - X - 1.$$

Ainsi,

$$P_3 = 3X^3 - X^2 - X - 1.$$

D'autre part,

$$P_3 = 2\left(X + \frac{1}{2}\right)(X-1) + 3X^2(X-1) = (X-1)(2X+1+3X^2) = (X-1)(3X^2+2X+1).$$

Soit Δ le discriminant de $3X^2+2X+1$. On a $\Delta = 4-12 = -8 < 0$. Donc $3X^2+2X+1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Conclusion, la factorisation de P_3 dans $\mathbb{R}[X]$ est donnée par

$$P_3 = (X-1)(3X^2+2X+1).$$

3. On note $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Par la question précédente, le discriminant de $3X^2+2X+1$ vaut $\Delta = -8 \in \mathbb{R}_-$ donc $3X^2+2X+1$ admet deux racines complexes conjuguées données par

$$\frac{-2-2\sqrt{2}i}{6} = -\frac{1+\sqrt{2}i}{3} \quad \text{et} \quad \frac{-2+2\sqrt{2}i}{6} = \frac{-1+\sqrt{2}i}{3}.$$

Dès lors, la factorisation de P_3 dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$P_3 = 3(X-1) \left(X + \frac{1+\sqrt{2}i}{3} \right) \left(X + \frac{1-\sqrt{2}i}{3} \right).$$

Les racines de P_3 sont donc $r_1 = 1$, $r_2 = -\frac{1+\sqrt{2}i}{3}$ et $r_3 = -\frac{1-\sqrt{2}i}{3}$. On a bien $r_1 \in \mathcal{D} \cup \{1\}$. De plus,

$$|r_2| = \frac{\sqrt{1+2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 \quad \text{et} \quad |r_3| = \frac{\sqrt{1+2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1.$$

Donc $r_2 \in \mathcal{D}$ et $r_3 \in \mathcal{D}$. Conclusion,

$$\text{les racines de } P_3 \text{ sont dans } \mathcal{D} \cup \{1\}.$$

4. On considère l'équation polynomiale suivante (E) : $P'(X^2) = 2P + 2X + 1$,
d'inconnu $P \in \mathbb{R}[X]$.

- (a) On rappelle que $P_2 = 2X^2 - X - 1$. Donc $P'_2 = 4X - 1$ puis $P'_2(X^2) = 4X^2 - 1$. D'autre part, $2P_2 + 2X + 1 = 4X^2 - 2X - 2 + 2X + 1 = 4X^2 - 1$. Donc on a bien $P'_2(X^2) = 2P_2 + 2X + 1$.
Conclusion,

$$P_2 \text{ est bien UNE solution de (E).}$$

- (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons P solution de (E). Alors,

$$P'(X^2) = 2P + 2X + 1.$$

Notons $n = \deg(P)$. Premier cas, $n \geq 2$. Alors d'une part $\deg(P') = n - 1$ et $\deg(P'(X^2)) = 2(n - 1) = 2n - 2$. D'autre part, $n > 1$ donc $\deg(2P + X + 1) = \deg(P) = n$. Ainsi,

$$\deg(P'(X^2)) = \deg(2P + X + 1) \Leftrightarrow 2n - 2 = n \Leftrightarrow n = 2.$$

Second cas, $n \leq 1$. Dans tous les cas, $n \leq 2$. Prenons donc maintenant P quelconque dans $\mathbb{R}_2[X]$: il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$. Dès lors, on obtient les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} P \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow P'(X^2) = 2P + 2X + 1 \\ &\Leftrightarrow 2a(X^2) + b = 2aX^2 + 2bX + 2c + 2X + 1 \\ &\Leftrightarrow 2aX^2 + b = 2aX^2 + (2b + 2)X + 2c + 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2a \\ 0 = 2b + 2 \\ b = 2c + 1 \end{cases} \quad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = aX^2 - X - 1. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S}_E = \{ aX^2 - X - 1 \in \mathbb{R}[X] \mid a \in \mathbb{R} \}.$$

NB : on retrouve bien pour $a = 2$ que $P_2 \in \mathcal{S}_E$.

Partie 2 : Détermination des P_n

5. Par ce qui précède, on observe que $\deg(P_1) = \alpha_1 = 1$, $\deg(P_2) = \alpha_2 = 2$ et $\deg(P_3) = \alpha_3 = 3$. On intuite donc que $\deg(P_n) = \alpha_n = n$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll \deg(P_n) = \alpha_n = n \gg.$$

Initialisation. Si $n = 1$, alors $P_1 = X - 1$. Donc $\deg(P_1) = \alpha_1 = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ i.e. $\deg(P_n) = \alpha_n = n$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Par construction,

$$P_{n+1} = P_n + (n+1)X^n(X-1).$$

Or par hypothèse de récurrence, $\deg(P_n) = n < \deg((n+1)X^n(X-1)) = n+1$. Donc

$$\deg(P_{n+1}) = n+1 \quad \text{et} \quad \alpha_{n+1} = n+1.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \deg(P_n) = \alpha_n = n.}$$

6. On observe que 1 est une racine de P_1 , P_2 et P_3 . Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll 1 \text{ est racine de } P_n \gg.$$

Initialisation. On a $P_1 = X - 1$ donc 1 est une racine de P_1 et donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n) : P_n(1) = 0$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$P_{n+1} = P_n + (n+1)X^n(X-1).$$

Donc

$$P_{n+1}(1) = P_n(1) + 0 = 0 \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Donc 1 est racine de P_{n+1} et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \text{ est une racine de } P_n.}$$

7. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \quad \ll \forall x > 1, P_n(x) > 0 \gg.$$

Initialisation. On a $P_1 = X - 1$ donc

$$\forall x > 1, \quad P_1(x) = x - 1 > 0.$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n) : \forall x > 1, P_n(x) > 0$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Pour tout $x > 1$, on a

$$P_{n+1}(x) = \underbrace{P_n(x)}_{>0} + (n+1) \underbrace{x^n}_{>0} \underbrace{(x-1)}_{>0} > 0.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]1; +\infty[, \quad P_n(x) > 0.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Par construction,

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad P_{k+1} - P_k = (k+1) X^k (X-1).$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} (P_{k+1} - P_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) X^k (X-1).$$

Or on reconnaît une somme télescopique à gauche. Conclusion,

$$P_n - P_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) X^k (X-1).$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît à nouveau une somme télescopique. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1) X^{k+1} - k X^k] = n X^n - 0 \times 1 = n X^n.$$

Conclusion,

$$\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1) X^{k+1} - k X^k] = n X^n.$$

10. Soit $n \geq 2$. Par la question 8. on a

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) X^k (X-1) \\ &= X-1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) X^k (X-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) X^k (X-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1) X^{k+1} - (k+1) X^k] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1) X^{k+1} - k X^k] - \sum_{k=0}^n X^k. \end{aligned}$$

Par la question précédente, on a $P_n = n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. On note que la formule reste encore vraie si $n=1$ car $P_1 = X-1$. Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n = n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

Partie 3 : Multiplicité des racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q_n = (X-1) P_n$

11. En développant, on obtient

$$(X-1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} X^k (X-1) = \sum_{k=0}^{n-1} [X^{k+1} - X^k].$$

On reconnaît une somme télescopique, conclusion,

$$(X-1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k = X^n - 1.$$

12. Par la question 10.

$$Q_n = (X-1)P_n = (X-1) \left(nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \right) = nX^{n+1} - nX^n - (X-1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

Par la question précédente,

$$Q_n = nX^{n+1} - nX^n - X^n + 1 = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

Puis,

$$Q'_n = (n+1)nX^n - (n+1)nX^{n-1} \quad \text{car } n \geq 1.$$

Conclusion,

$$Q_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 \quad \text{et} \quad Q'_n = (n+1)nX^n - (n+1)nX^{n-1}.$$

13. Par la question précédente, on a $Q'_n = (n+1)nX^{n-1}(X-1)$. On en déduit directement que

$$1 \text{ est une racine simple de } Q'_n \text{ et } 0 \text{ est une racine de multiplicité } n-1 \text{ de } Q'_n.$$

On note bien que la somme des multiplicités correspond à $n = \deg(Q'_n)$.

14. Soit r une racine multiple de Q_n . Alors, r est de multiplicité supérieure ou égale à 2. Donc par caractérisation de la multiplicité par les dérivées, on a $Q_n(r) = Q'_n(r)$. En particulier, r est racine de Q'_n . Donc par la question précédente, $r = 0$ ou $r = 1$. Cependant,

$$Q_n(0) = n0^{n+1} - (n+1)0^n + 1 = 1 \quad \text{car } n \geq 1.$$

Donc $Q_n(0) \neq 0$ et 0 n'est pas racine de Q_n . D'autre part,

$$Q_n(1) = n - (n+1) + 1 = 0.$$

Donc $r = 1$ est bien racine. Conclusion,

$$1 \text{ est l'unique racine multiple de } Q_n.$$

Déterminons la multiplicité de 1 dans Q_n . On a $Q_n(1) = Q'_n(1) = 0$. De plus, par la question précédente, 1 est racine simple de Q'_n . Donc $Q'_n(1) = 0$ (ok) et $(Q'_n)'(1) \neq 1 \Leftrightarrow Q''_n(1) \neq 1$. Donc $Q_n(1) = Q'_n(1) = 0$ et $Q''_n(1) \neq 0$. Conclusion,

$$1 \text{ est une racine double de } Q_n \text{ i.e. de multiplicité exactement 2 de } Q_n.$$

15. Montrons que P_n ne possède que des racines simples. Procédons par l'absurde. Soit r une racine multiple de P_n . Alors la multiplicité de r est supérieure ou égale à 2 donc $(X - r)^2$ divise P_n :

$$\exists R_n \in \mathbb{R}[X], \quad P_n = (X - r)^2 R_n.$$

Donc

$$Q_n = (X - 1)(X - r)^2 R_n.$$

Ainsi, $(X - r)^2$ divise Q_n et donc r est une racine multiple de Q_n . Donc par la question précédente, $r = 1$. Or $Q_n = (X - 1)(X - r)^2 R_n$ donc

$$Q_n = (X - 1)^3 R_n.$$

Cela implique que r est une racine de multiplicité au moins 3 de Q_n . Or nous avons vu que 1 est racine double de Q_n . Contradiction. Conclusion, P_n ne possède pas de racine multiple :

P_n ne possède que des racines simples.

16. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec multiplicités. Or par la question précédente, toutes les racines de P_n sont simples et par la question 5. $\deg(P_n) = n$. Conclusion,

P_n possède exactement n racines (réelles ou complexes) distinctes.

Partie 4 : Localisation des racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k.$$

Puisque $|z| > 1$, alors pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $|z|^k \leq |z|^{n-1} < |z|^n$. Donc

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| < \sum_{k=0}^{n-1} |z|^n = |z|^n \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n |z|^n.$$

Conclusion,

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| < n |z|^n.$$

18. Procédons par l'absurde. Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| > 1$ et z racine de P_n . Alors,

$$P_n(z) = 0.$$

Donc par la question 10.

$$nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \quad \Rightarrow \quad n |z|^n = \left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right|$$

Donc par la question précédente,

$$n |z|^n < n |z|^n \quad \text{contradiction.}$$

Conclusion,

P_n n'a pas de racine dont le module est strictement plus grand que 1.

19. Soit $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ une racine n -ième de l'unité différente de 1. Alors, par la question 10.

$$P_n(z) = nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Puisque $z \in \mathbb{U}_n$, $z^n = 1$. De plus, $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ donc on sait que $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$. Ainsi,

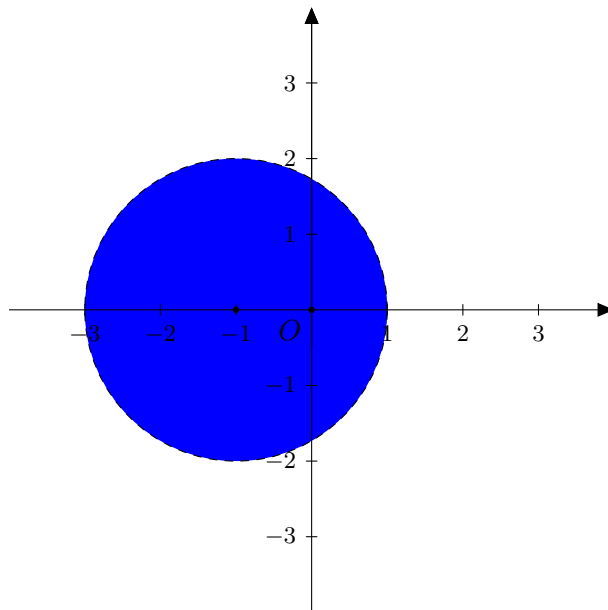
$$P_n(z) = n \neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}, \quad z \text{ n'est pas racine de } P_n.}$$

20. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $|z| = 1$.

(a) Soit $\mathcal{D}_2 = \{z' \in \mathbb{C} \mid |z' + 1| < 2\}$. $\mathcal{D}_2$ est l'ensemble des complexes dont la distance à $z_0 = -1$ est strictement inférieure à 2. Donc $\mathcal{D}_2$ est le disque ouvert de centre -1 et de rayon 2 :



(b) Par le cours,

$$|z + 1|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{1}) + |1|^2 = 1 + 2\operatorname{Re}(z) + 1 \quad \text{car } |z| = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{|z + 1|^2 = 2(1 + \operatorname{Re}(z)).}$$

(c) On sait que $|z| = 1$ autrement dit que z est sur le cercle unité $z \in \mathbb{U}$. Donc $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$. Or $z \neq 1$. Donc nécessairement, $\operatorname{Re}(z) < 1$. Ainsi, par la question précédente,

$$|z + 1|^2 < 2(1 + 1) = 4 \quad \Rightarrow \quad |z + 1| < 2, \quad \text{car } |z + 1| \geq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{z \in \mathcal{D}_2.}$$

(d) Procédons par l'absurde et supposons z racine de P_n . Alors par la question 10.

$$P_n(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad nz^n - \sum_{k=0}^{n-1} z^k \quad \Leftrightarrow \quad nz^n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Supposons $n \geq 3$. Alors,

$$nz^n = 1 + z + \sum_{k=2}^{n-1} z^k.$$

Donc par l'inégalité triangulaire,

$$n|z|^n = \left| 1 + z + \sum_{k=2}^{n-1} z^k \right| \leq |1 + z| + \sum_{k=2}^{n-1} |z^k| = |1 + z| + \sum_{k=2}^{n-1} 1 \quad \text{car } |z| = 1.$$

Donc

$$n \leq |1 + z| + n - 2 < 2 + n - 2 = n \quad \text{par la question précédente.}$$

Donc $n < n$ contradiction. Si $n = 2$, alors

$$2z^2 = 1 + z \quad \Rightarrow \quad 2 = |2z^2| = |1 + z| < 2 \quad \text{par la question précédente.}$$

On retrouve une contradiction. Dernier cas, si $n = 1$, alors

$$z = 1, \quad \text{ce qui est aussi exclu.}$$

On a donc bien une contradiction dans tous les cas. Conclusion,

$$\boxed{z \text{ n'est pas racine de } P_n.}$$

21. Par les questions précédentes, on a vu que P_n n'a pas de racines dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ ni dans $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid |z| = 1\}$. Enfin, on a vu que 1 est racine simple de P_n . Conclusion,

$$\boxed{P_n \text{ possède une unique racine de module supérieur ou égal à 1 qui est } z = 1.}$$

Et comme P_n possède exactement n racines simples distinctes, il a nécessairement $n - 1$ racines localisées dans $\mathcal{D}$.

Problème II - Suites

Partie 1 : La série harmonique

On appelle série harmonique la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrons que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et minorée par 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0.$$

Donc la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. De plus, par sa stricte croissante on obtient également,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n > H_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante et minorée par 1.}}$$

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors par l'identité des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. La fonction $\ln$ est continue sur $[k; k+1]$ et dérivable sur $]k; k+1[$ donc d'après l'identité des accroissements finis, il existe $c_k \in]k; k+1[$ tel que

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln'(c_k)(k+1-k) = \frac{1}{c_k}.$$

Or $c_k \geq k > 0$, donc $\frac{1}{c_k} \leq \frac{1}{k}$. Ainsi,

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

De même sur $[k-1; k]$ (car $k-1 > 0$), il existe $d_k \in]k-1; k[$ tel que

$$\ln(k) - \ln(k-1) = \frac{1}{d_k} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \frac{1}{d_k}.$$

Or $d_k \leq k > 0$ donc $\frac{1}{d_k} \geq \frac{1}{k}$ et donc

$$\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \geq \frac{1}{k}.$$

Conclusion,

$$\forall k \geq 2, \quad \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right).$$

4. Soit $n \geq 2$. En sommant entre 2 et n l'inégalité précédente, on a

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{k-1}\right).$$

Ou encore

$$\sum_{k=2}^n [\ln(k+1) - \ln(k)] \leq H_n - 1 \leq \sum_{k=2}^n [\ln(k) - \ln(k-1)].$$

On reconnaît de chaque côté une somme télescopique :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n - 1 \leq \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

Enfin, $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 = \ln(n+1) - \ln(2) + \ln(e) \geq \ln(n+1)$. Donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

Si $n = 1$, on a $H_1 = 1$, $\ln(1+1) = \ln(2) \geq 1 \leq 0 + 1 = \ln(1) + 1$. Donc l'inégalité reste vraie pour $n = 1$. Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

5. Montrons que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1.$$

D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1.$$

Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1.$$

Autrement dit $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty.$$

Partie 2 : Une suite implicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = e^x - \frac{1}{nx}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'_n(x) = e^x + \frac{1}{nx^2} > 0.$$

Donc la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus f_n est continue sur cet intervalle. De plus,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x) = 1 - \infty = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty - 0 = +\infty.$$

donc $0 \in]-\infty; +\infty[$. Donc par le théorème de la bijection,

$$\text{il existe un unique réel } u_n \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } f_n(u_n) = 0.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Or $\frac{1}{n} > 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} > 1$ et donc $f_n\left(\frac{1}{n}\right) > 0 = f_n(u_n)$. Donc par la stricte croissance de f_n , on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

8. Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

9. (a) Soient $x \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^x - \frac{1}{(n+1)x} - e^x + \frac{1}{nx} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)x} = \frac{1}{n(n+1)x}.$$

Conclusion,

$$\forall x \in]0; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{n(n+1)x}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, en prenant $x = u_n > 0$, on a

$$f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = \frac{1}{n(n+1)u_n} > 0.$$

Or par construction, $f_n(u_n) = 0$. Donc

$$f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1}).$$

Donc par la stricte croissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que $u_n > u_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en conclut que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$$

10. Par construction de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a

$$0 = f_n(u_n) = e^{u_n} - \frac{1}{nu_n} \Leftrightarrow e^{u_n} = \frac{1}{nu_n} \Leftrightarrow e^{-u_n} = nu_n \quad \text{car } u_n > 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nu_n = e^{-u_n} .}$$

11. On sait que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc par continuité de la fonction exponentielle en 0, $e^{-u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi, par la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-u_n} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} .}$$

12. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ i.e. $u_n = \frac{1}{n} + v_n$. Alors par la question 10., on a

$$n \left(\frac{1}{n} + v_n \right) = e^{-\left(\frac{1}{n} + v_n\right)} \Leftrightarrow 1 + nv_n = e^{-\frac{1}{n} - v_n} .$$

Or par la question précédente, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ i.e. $\frac{1}{n} + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ou encore $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi,

$$e^{-\frac{1}{n} - v_n} = e^{-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} .$$

Posons $u = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors, $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $o(u) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Or $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + o(u)$ donc

$$e^{-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) .$$

Dès lors,

$$1 + nv_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Conclusion,

$$\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2} .}$$

Autrement dit,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .}$$

Le signe $-$ est cohérent car on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < \frac{1}{n}$.

13. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = u_n - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et l'on a $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + w_n$. Alors,

$$e^{-u_n} = e^{-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - w_n} = e^{-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Posons $u \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors,

• on a

$$u^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

• Et $o(u^2) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Donc

$$e^{-u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

D'autre part, par la question 10., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$e^{-u_n} = nu_n = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + w_n\right) = 1 - \frac{1}{n} + nw_n.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n} + nw_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) &\Leftrightarrow nw_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\Leftrightarrow w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + w_n$. Conclusion,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}.$$

Partie 3 : La série associée

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $T_n = \frac{S_n}{n}$. On admet que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Notons T sa limite.

14. Montrons que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p+1$,

$$0 < T_n \leq \frac{S_p}{n} + \frac{n-p}{n} \frac{1}{p+1}.$$

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq p+1$. D'une part, par la question 7. pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u_k > 0$. Donc par somme,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k > 0.$$

Or $n > 0$ donc par quotient, $T_n = \frac{S_n}{n} > 0$. D'autre part, par la relation de Chasles pour la somme :

$$T_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k \right) \quad \text{car } n \geq p+1.$$

Donc

$$T_n = \frac{S_p}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=p+1}^n u_k.$$

Or, toujours par la question 7. pour tout $k \in \llbracket p+1; n \rrbracket$, $u_k \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{p+1}$. Donc

$$T_n \leq \frac{S_p}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=p+1}^n \underbrace{\frac{1}{p+1}}_{\text{indépendant de } k} = \frac{S_p}{n} + \frac{1}{n} \frac{1}{p+1} \sum_{k=p+1}^n 1 = \frac{S_p}{n} + \frac{1}{n} \frac{n-p}{p+1}.$$

Conclusion,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq p+1, \quad 0 < T_n \leq \frac{S_p}{n} + \frac{n-p}{n} \frac{1}{p+1}.$$

15. Dédudions-en la valeur de T . On sait que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers T . De plus, à $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_p}{n} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-p}{n} \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+1}.$$

Donc en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans la question précédente,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq T \leq \frac{1}{p+1}.$$

Ceci étant vrai pour $p \in \mathbb{N}^*$ quelconque, on en déduit en passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$, $0 \leq T \leq 0$.

Conclusion,

$$T = 0.$$

16. On a vu que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Donc par le lemme de Cesàro, on en déduit que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

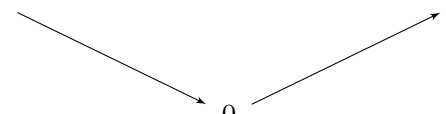
Donc

$$\left(\frac{S_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.$$

17. Puisque l'exponentielle est sa propre dérivée, l'équation de sa tangente en 0 est donnée par

$$y = e^0 (x - 0) + e^0 = x + 1.$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. Donc pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x < 0$, $f'(x) < 0$. De plus, $f(0) = e^0 - 1 = 0$. Donc on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			

On observe donc que 0 est un minimum global de f i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1.$$

18. Par la question 10., en prenant $x = -u_n$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$nu_n = e^{-u_n} \geq 1 - u_n \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)u_n \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n \geq \frac{1}{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \frac{1}{n+1}.$$

19. Or nous savions déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n < \frac{1}{n}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq u_k \leq \frac{1}{k}.$$

En sommant entre 1 et n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq S_n \leq H_n.$$

On effectue alors le changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme et on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} = H_n - 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq H_n.$$

Donc pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{H_n}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{(n+1)\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)}.$$

Or par la question 5., $\frac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{(n+1)\ln(n)} = 1 - 0 + 0 = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)}.$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}.$$

Dès lors, par quotient,

$$\boxed{T_n = \frac{S_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}.$$

On remarque notamment que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui est cohérent avec la question 15.

Problème III - Continuité-dérivabilité

On considère l'équation suivante d'inconnue une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(\star) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [1 - f(x)f(y)] f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Soit f une fonction vérifiant l'équation $(\star)$.

Partie 1 : Préliminaires

- On suppose dans cette question et dans cette question uniquement que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$: il existe $K \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = K$. Déterminons alors la valeur de K . Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = K$, on a également pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = K$. Dès lors, par $(\star)$,

$$\begin{aligned} [1 - K^2] K = 2K & \Leftrightarrow K = 0 \text{ OU } 1 - K^2 = 2 \\ & \Leftrightarrow K = 0 \text{ OU } K^2 = -1 \text{ impossible.} \end{aligned}$$

Conclusion, la fonction nulle est l'une unique solution constante à $(\star)$:

$$\boxed{K = 0.}$$

- On suppose à nouveau f quelconque. Montrons que $f(0) = 0$. Prenons $x = y = 0$ dans $(\star)$. Alors,

$$\begin{aligned} [1 - f(0)^2] f(0) = 2f(0) & \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ OU } 1 - f(0)^2 = 2 \\ & \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ OU } f(0)^2 = -1 \text{ impossible.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0) = 0.}$$

- Démontrons que f est une fonction impaire. La fonction f est définie (et même continue) sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $y = -x \in \mathbb{R}$. Par $(\star)$

$$[1 - f(x)f(-x)] f(x - x) = f(x) + f(-x).$$

Donc

$$[1 - f(x)f(-x)] f(0) = f(x) + f(-x).$$

Par la question précédente, $f(0) = 0$. Donc

$$0 = f(x) + f(-x) \quad \Leftrightarrow \quad f(-x) = -f(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en conclut que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

- Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [1 - f(x)^2] f(2x) = 2f(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par $(\star)$ en prenant $y = x$,

$$[1 - f(x)f(x)] f(x + x) = f(x) + f(x).$$

D'où directement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad [1 - f(x)^2] f(2x) = 2f(x).}$$

5. Montrons par l'absurde que la fonction f ne peut pas diverger vers $+\infty$ en $+\infty$. Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Alors, on obtient les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - f(x)^2] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x) = +\infty.$$

Donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - f(x)^2] f(2x) = -\infty.$$

Or par la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}, [1 - f(x)^2] f(2x) = 2f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x) = +\infty$. Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ ne diverge pas vers } +\infty \text{ en } +\infty.}$$

6. Montrons que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad [1 + f(x)f(y)] f(x - y) = f(x) - f(y).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En prenant $\tilde{y} = -y$ dans (★), on obtient

$$[1 - f(x)f(-y)] f(x - y) = f(x) + f(-y).$$

Or par la question 3. la fonction f est impaire donc $f(-y) = -f(y)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad [1 + f(x)f(y)] f(x - y) = f(x) - f(y).}$$

Partie 2 : Le cas dérivable

On suppose dans cette partie que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (1 + f(x+h)f(x)) \frac{f(h)}{h}.$$

Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Par la question précédente, en prenant $\tilde{x} = x+h$ et $\tilde{y} = x$, on obtient que

$$\begin{aligned} & [1 + f(x+h)f(x)] f(x+h-x) = f(x+h) - f(x) \\ \Leftrightarrow & [1 + f(x+h)f(x)] f(h) = f(x+h) - f(x) \\ \Leftrightarrow & [1 + f(x+h)f(x)] \frac{f(h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (1 + f(x+h)f(x)) \frac{f(h)}{h}.$$

8. Dédudons-en que f est dérivable en x et donnons une expression de $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(0)$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est notamment en x et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x).$$

Par produit et somme,

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + f(x+h)f(x)) = 1 + f(x)f(x) = 1 + f(x)^2.$$

D'autre part, par la question baignoire, $f(0) = 0$. Donc, pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h - 0}.$$

On reconnaît alors le taux d'accroissement de f en 0. Or par hypothèse la fonction f est dérivable en 0 donc sa limite existe et

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h)}{h} = f'(0).$$

Par produit,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} (1 + f(x+h)f(x)) \frac{f(h)}{h} = (1 + f(x)^2) f'(0).$$

Par la question précédente, $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe donc la fonction f est dérivable en x et

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (1 + f(x)^2) f'(0).$$

Conclusion, f est dérivable en x et

$$f'(x) = (1 + f(x)^2) f'(0).$$

9. (a) On pose $\alpha = f'(0)$ et on suppose dans cette question que $\alpha > 0$. Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geq \alpha.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1 + f(x)^2) f'(0) = (1 + f(x)^2) \alpha$. Or $1 + f(x)^2 \geq 1$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geq \alpha.$$

(b) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $c_x \in]0; x[$ tel que

$$f(x) = f'(c_x) x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question 8. la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc notamment sur $[0; x]$. En particulier, la fonction f est continue sur $[0; x]$ et dérivable sur $]0; x[$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$\exists c_x \in]0; x[, \quad f'(c_x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Or par la question 2. $f(0) = 0$. Donc $f'(c_x) = \frac{f(x)}{x}$. Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists c_x \in]0; x[, \quad f(x) = f'(c_x) x.$$

(c) A l'aide de la question 5. concluons à une contradiction. Par la question 9.a on a pour tout $f'(c_x) \geq \alpha$. Donc par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = f'(c_x) x \geq \alpha x \quad \text{car } x > 0.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha x = +\infty$ car $\alpha > 0$. Donc par le théorème de minoration, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Cependant par la question 5. nous avons établi que la fonction f ne pouvait pas diverger vers $+\infty$.

$$\text{On conclut bien à une contradiction.}$$

Donc α ne peut pas être strictement positif.

On admet de même que α ne peut pas être strictement négatif et que donc nécessairement, $\alpha = 0$.

10. Concluons que (★) admet une unique solution f continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0, que l'on précisera. Par ce qui précède, on a $f'(0) = \alpha = 0$. Or par la question 8.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (1 + f(x)^2) f'(0).$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0.$$

Par conséquent, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = K$. Par la question 1. on en déduit que $K = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.}$$

On vérifie aisément que la fonction nulle est bien une solution de (★). On en conclut donc que

$$\boxed{\text{l'unique solution continue sur } \mathbb{R} \text{ et dérivable en 0 de (★) est la fonction nulle.}}$$

Partie 3 : Existence d'un zéro

On ne suppose plus que f est dérivable en 0 et on reprend un cas plus général : on suppose f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ solution de (★).

On veut montrer que f s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. On procède par l'absurde et on suppose que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \neq 0$. On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$.

11. On suppose que $f(a) > 0$. Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) > 0$. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) \leq 0$. Par hypothèse, on sait que $f(x) \neq 0$, nécessairement, $f(x) < 0$. Ainsi, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a; x]$ (ou $[x; a]$) et change de signe entre a et x . Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $t \in [a; x] \subset \mathbb{R}_+^*$ (ou $[x; a]$) tel que $f(t) = 0$. Or par hypothèse f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) > 0.}$$

12. A l'aide de la question 6. montrons que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x > y$. Par la question 6.

$$f(x) - f(y) = [1 + f(x)f(y)] f(x - y).$$

Or $x > 0$, $y > 0$ et $x - y > 0$. Donc par la question précédente, $f(x) > 0$, $f(y) > 0$ et $f(x - y) > 0$. Par somme et produit, on en déduit que

$$f(x) - f(y) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > f(y).$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $x > y$, on en conclut que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

13. Déduisons-en que f converge vers une limite finie que l'on note ℓ . Puisque f est strictement croissante, par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

- OU f diverge vers $+\infty$,
- OU f converge vers une limite finie.

Or par la question 5. la fonction f ne peut pas diverger vers $+\infty$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ converge vers une limite finie.}}$$

Notons ℓ cette limite.

14. Montrons que $\ell = 0$. Par la question 4.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [1 - f(x)^2] f(2x) = 2f(x)$$

Donc par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$,

$$[1 - \ell^2] \ell = 2\ell.$$

Donc $\ell = 0$ ou

$$1 - \ell^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 = -1 \text{ impossible.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\ell = 0.}$$

15. Dédudons-en une contradiction. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall x \geq a, \quad f(x) \geq f(a).$$

Donc par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$,

$$\ell \geq f(a) > 0.$$

Ce qui contredit la question précédente :

on obtient bien une contradiction et donc l'hypothèse $f(a) > 0$ est fausse.

De même, on montre que $f(a) < 0$ est impossible.

16. Par ce qui précède, nous avons vu que pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f(a) > 0$ et $f(a) < 0$ sont impossibles. Donc $f(a) = 0$. Or par hypothèse, la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Contradiction. Par conséquent, on en déduit que nécessairement f doit s'annuler :

$$\boxed{\exists b \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(b) = 0.}$$

Partie 4 : Conclusion du cas continue

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{S} = \{t \in \mathbb{R}_+^* \mid f(t) = 0\}$. Par la partie précédente, on sait que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ et on fixe $b \in \mathcal{S}$.

17. Montrons que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $mb \in \mathcal{S}$. On procède par récurrence. Posons pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(m)$: « $mb \in \mathcal{S}$ ».

Initialisation. Si $m = 1$, alors $mb = b \in \mathcal{S}$ par hypothèse. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P}(m) \Rightarrow \mathcal{P}(m+1)$. Supposons $\mathcal{P}(m)$ donc $mb \in \mathcal{S}$. Appliquons (★) avec $x = mb$ et $y = b$:

$$[1 - f(b)f(mb)] f(b+mb) = f(b) + f(mb).$$

Or $f(b) = 0$ car $b \in \mathcal{S}$ et $f(mb) = 0$ car $mb \in \mathcal{S}$ par hypothèse de récurrence. Donc

$$[1 - 0] f((m+1)b) = 0 + 0 \quad \Leftrightarrow \quad f((m+1)b) = 0.$$

Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(m)$ est vraie :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad mb \in \mathcal{S}.}$$

18. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{b}{2^n} \in \mathcal{S}$. Par la question 4.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [1 - f(x)^2] f(2x) = 2f(x).$$

En prenant $\tilde{x} = \frac{x}{2}$, on obtient également,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[1 - f\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - f\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] f(x).$$

Or puisque $b \in \mathcal{S}$, alors $f(b) = 0$ et donc, en prenant $x = b$,

$$f\left(\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Puis en prenant $x = \frac{b}{2}$,

$$f\left(\frac{b}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - f\left(\frac{b}{4}\right)^2\right] f\left(\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Donc $f\left(\frac{b}{2^2}\right) = 0$. Par récurrence, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{b}{2^n}\right) = 0 \text{ i.e. } \frac{b}{2^n} \in \mathcal{S}.$$

19. Dédisons-en que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{mb}{2^n} \in \mathcal{S}$. Premier cas, $m = 0$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{mb}{2^n} = 0$ et donc par la question 2. $f\left(\frac{mb}{2^n}\right) = 0$. Deuxième cas, soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $b_n = \frac{b}{2^n}$. Par la question précédente, $b_n \in \mathcal{S}$. Donc par la question 17. en remplaçant b par b_n , on a $mb_n \in \mathcal{S}$. Donc $\frac{mb}{2^n} \in \mathcal{S}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{mb}{2^n} \in \mathcal{S}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{b}{2^n} \left\lfloor \frac{2^n x}{b} \right\rfloor$, où pour $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t .

20. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$. Par définition de la partie entière, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$u - 1 < \lfloor u \rfloor \leq u.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en prenant $u = \frac{2^n x}{b}$,

$$\frac{2^n x}{b} - 1 < \left\lfloor \frac{2^n x}{b} \right\rfloor \leq \frac{2^n x}{b}.$$

De plus, $b > 0$ donc $\frac{b}{2^n} > 0$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x - \frac{b}{2^n} < \frac{b}{2^n} \left\lfloor \frac{2^n x}{b} \right\rfloor = u_n \leq x.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x - \frac{b}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x = x$. Conclusion, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x.}$$

21. Dédudions-en que $x \in \mathcal{S}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $m = \lfloor \frac{2^n x}{b} \rfloor \in \mathbb{N}$. Par la question 19. :

$$u_n = \frac{b}{2^n} \left\lfloor \frac{2^n x}{b} \right\rfloor = \frac{mb}{2^n} \in \mathcal{S}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(u_n) = 0.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en x . Par caractérisation séquentielle de la continuité, on en déduit que

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{x \in \mathcal{S}.$$

22. Démontrons alors que $(\star)$ admet une unique solution f continue sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Analyse. Soit f une fonction continue solution de $(\star)$. Par la question précédente pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a obtenu que $f(x) = 0$. Donc la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par la question 2. $f(0)$ donc f est nulle sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, par la question 3. la fonction f étant impaire, la fonction f est aussi nulle sur $\mathbb{R}_-$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Synthèse. Si f est la fonction nulle alors par la question 1. la fonction f est solution de $(\star)$ et est bien continue. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et solution de } (\star) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0.}$$