

Epreuve de mathématiques 6

2025-2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroté les copies



Problème 1 - Polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence par $P_1 = X - 1$ et

$$\forall n \geq 1, \quad P_{n+1} = P_n + (n+1) X^n (X-1).$$

Partie 1 : Cas $n = 2$ et $n = 3$

1. Calculer P_2 et préciser sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer P_3 et préciser sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
3. On note $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Déterminer la factorisation de P_3 dans $\mathbb{C}$ et vérifier que les racines de P_3 appartiennent à $\mathcal{D} \cup \{1\}$.
4. On considère l'équation polynomiale suivante $(E) \quad : \quad P'(X^2) = 2P + 2X + 1$, d'inconnu $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - (a) Vérifier que P_2 est une solution de (E) .
 - (b) Déterminer toutes les solutions de (E) .

Partie 2 : Détermination des P_n

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré de P_n et α_n son coefficient dominant.
6. Montrer que les P_n possèdent une racine commune que l'on précisera.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1; +\infty[$, $P_n(x) > 0$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) X^k (X-1) = P_n - P_1.$$

9. Soit $n \geq 1$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} [(k+1) X^{k+1} - k X^k]$.
10. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $P_n = n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

Partie 3 : Multiplicité des racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q_n = (X-1) P_n$

11. Simplifier $(X-1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.
12. En déduire l'expression développée de Q_n puis de Q'_n .
13. Déterminer les racines de Q'_n et leurs multiplicités.
14. En déduire que 1 est l'unique racine multiple (de multiplicité strictement plus grande que 1) de Q_n et préciser sa multiplicité.
15. Montrer que P_n ne possède que des racines simples.
16. Combien de racines distinctes (réelles ou complexes) possède P_n ?

Partie 4 : Localisation des racines

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Montrer que $\left| \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right| < n |z|^n$.
18. En déduire que P_n n'a pas de racine dont le module est strictement plus grand que 1.
19. Soit $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ une racine n -ième de l'unité différente de 1. Montrer que z n'est pas racine de P_n .
20. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $|z| = 1$.
 - (a) Dessiner $\mathcal{D}_2 = \{z' \in \mathbb{C} \mid |z' + 1| < 2\}$.
 - (b) Développer et simplifier $|z + 1|^2$.
 - (c) En déduire que $z \in \mathcal{D}_2$.
 - (d) Montrer que z n'est pas racine de P_n .
21. Déterminer toutes les racines de P_n ayant un module supérieur ou égal à 1.

Problème 2 - Suites

Partie 1 : La série harmonique

On appelle série harmonique la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et minorée par 1.
2. Rappeler l'identité des accroissements finis.
3. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on a

$$\ln \left(\frac{k+1}{k} \right) \leq \frac{1}{k} \leq \ln \left(\frac{k}{k-1} \right).$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

5. Déterminer la limite de $\left(\frac{H_n}{\ln(n)} \right)_{n \geq 2}$ en déduire un équivalent et la limite de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie 2 : Une suite implicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = e^x - \frac{1}{nx}.$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n admet une unique valeur d'annulation noté u_n .
7. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

8. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

9. (a) Soit $x \in]0; +\infty[$. Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement monotone.
10. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$nu_n = e^{-u_n}.$$
11. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
12. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. En utilisant à nouveau la question 10., déterminer un équivalent simple de v_n quand $n \rightarrow +\infty$ et en déduire un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n^2}$ de u_n en $+\infty$.
13. Procéder de même pour obtenir un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n^3}$ de u_n en $+\infty$.

Partie 3 : La série associée

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $T_n = \frac{S_n}{n}$. On admet que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Notons T sa limite.

14. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p + 1$,

$$0 < T_n \leq \frac{S_p}{n} + \frac{n-p}{n} \frac{1}{p+1}.$$

15. En déduire la valeur de T .
16. Préciser l'équation de la tangente de la fonction exponentielle en 0 et montrer que le graphe de la fonction exponentielle est au-dessus de cette tangente sur $\mathbb{R}$ tout entier.
17. A l'aide de la question 10. en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{1}{n+1}$.
18. A l'aide des questions précédentes, montrer que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ puis en déduire un équivalent de T_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Problème 3 - Continuité-dérivabilité

On considère l'équation suivante d'inconnue une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(\star) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [1 - f(x)f(y)] f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Soit f une fonction vérifiant l'équation $(\star)$.

Partie 1 : Préliminaires

1. On suppose dans cette question et dans cette question uniquement que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$: il existe $K \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = K$. Déterminer alors la valeur de K .
2. On suppose à nouveau f quelconque. Montrer que $f(0) = 0$.
3. Démontrer que f est une fonction impaire. *Indication : on pourra poser $y = -x$.*
4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, [1 - f(x)^2] f(2x) = 2f(x).$$

5. Montrer par l'absurde que la fonction f ne peut pas diverger vers $+\infty$ en $+\infty$.

6. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad [1 + f(x)f(y)] f(x - y) = f(x) - f(y).$$

Partie 2 : Le cas dérivable

On suppose dans cette partie que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (1 + f(x+h)f(x)) \frac{f(h)}{h}.$$

8. En déduire que f est dérivable en x et donner une expression de $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(0)$.

9. On pose $\alpha = f'(0)$ et on suppose dans cette question que $\alpha > 0$.

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geq \alpha.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $c_x \in]0; x[$ tel que

$$f(x) = f'(c_x) x.$$

(c) A l'aide de la question 5. conclure à une contradiction.

On admet de même que α ne peut pas être strictement négatif et que donc nécessairement, $\alpha = 0$.

10. Conclure que (★) admet une unique solution f continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0, que l'on précisera.

Partie 3 : Existence d'un zéro

On ne suppose plus que f est dérivable en 0 et on reprend le cas général d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ solution de (★).

On veut montrer que f s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. On procède par l'absurde et on suppose que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \neq 0$. On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$.

11. On suppose que $f(a) > 0$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) > 0$.

12. A l'aide de la question 6. montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

13. En déduire que f converge vers une limite finie que l'on note ℓ .

14. Montrer que $\ell = 0$.

15. En déduire une contradiction.

De même, on montre que $f(a) < 0$ est impossible.

16. Que peut-on en déduire ?

Partie 4 : Conclusion du cas continue

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{S} = \{t \in \mathbb{R}_+^* \mid f(t) = 0\}$. Par la partie précédente, on sait que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ et on fixe $b \in \mathcal{S}$.

17. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $mb \in \mathcal{S}$.

18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{b}{2^n} \in \mathcal{S}$.

19. En déduire que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{mb}{2^n} \in \mathcal{S}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{b}{2^n} \left\lfloor \frac{2^n x}{b} \right\rfloor$, où pour $t \in \mathbb{R}$, $[t]$ désigne la partie entière de t .

20. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$.

21. En déduire que $x \in \mathcal{S}$.

22. Démontrer alors que (★) admet une unique solution f continue sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.