Commentaires du DS4
Fonctions usuelles, équations complexes, calcul d'intégrales

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{70}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3.4	P3	Total	Note finale
Moyenne	-2,4	3,7	6,2	1,4	1,4	9	3,7	8,9	0,9	0,4	13,9	24,2	8,35
Sur		10	10	5	15	30	8	24	6	22	60	100	20

TOTAL : 100 pt

Problème I - Calcul dans $\mathbb{R}$ 10 pt

1. **5 pt** Résoudre dans $\mathbb{R}$,
$$(I)\ :\quad \frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} < 2.$$
Un calcul long mais ne faisant appel qu'à des pratiques élémentaires. A retravailler si l'on n'a pas abouti. L'erreur la plus fréquente étant naturellement d'oublier de changer de sens l'inégalité lorsque l'on multiplie par un terme négatif.

2. **5 pt** Résoudre dans $\mathbb{R}$,
$$(J)\ :\quad |3-x| + 2x + 3 < \left|x^2 - x - 2\right| + 2.$$
Mieux sur cette question mais beaucoup de d'inversion sur $|3-x|$ qui vaut $x-3$ si $x \geqslant 3$ et non l'inverse.

Problème II - Equations différentielles 30 pt

On fixe dans ce problème :
$$I =]-1;1[\,.$$
L'objectif de ce problème est de résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur I.

$$(E)\qquad \forall x \in I,\qquad \left(x^2-1\right) y''(x) + 3xy'(x) - 8y(x) = 2x.$$

Partie 1 : Cours 10 pt

On considère les équations suivantes :

$$(E_1)\qquad \forall x \in \mathbb{R},\qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 10x$$
$$(E_2)\qquad \forall x \in \mathbb{R},\qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = \mathrm{e}^{-5x}$$
$$(E_3)\qquad \forall x \in \mathbb{R},\qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 10x + \mathrm{e}^{-5x}\,.$$

1. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Préciser puis résoudre (E_0) l'équation homogène associée aux équations (E_i), $i \in [\![1;3]\!]$.
   On donnera le résultat sous forme ensembliste et d'espace vectoriel engendré.

   Bien globalement. Vous donnez bien les solutions sous forme ensembliste mais beaucoup plus d'erreurs sous forme d'espace engendré, preuve d'un manque flagrant de préparation sur ce point.

2. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Résoudre (E_1).

   Là aussi un bon ensemble. La méthode est sue, les calculs corrects. La rédaction est davantage à perfectionner. N'oubliez pas un $\forall x$ dans TOUTES vos équations fonctionnelles. Présentez a et b AVANT d'écrire votre fonction $y_p : x \mapsto ax + b$. Ne supposez pas y_p solution ou même deux fois dérivable initialement. Mais puisque y_p est polynomiale alors y_p est deux fois dérivable puis l'on écrit y_p est UNE solution de $(E_2) \Leftrightarrow \ \ldots$. Pour les calculs j'ai quand même vu $(ax+b)' = ax$. Nous sommes au dessus de cela.

3. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Résoudre (E_2).

   Globalement bien traitée, même si les calculs contiennent davantage d'erreurs. Il suffit de poser $ax\,\mathrm{e}^{-5x}$ et non $(ax+b)\,\mathrm{e}^{-5x}$.

4. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Résoudre (E_3).

   Vous avez presque tous bien vu le principe de superposition. La rédaction est parfois expéditive, allez voir le corrigé même si vous avez eu les points.

Partie 2 : Résolution de (F) $\boxed{\textbf{5 pt}}$

Soit $J =]0;\pi[$. On considère l'équation

$$(F) \qquad \forall t \in J, \qquad z''(t) + 9z(t) = -2\cos(t)\sin(t).$$

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Préciser $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène associée à (F).
   On donnera le résultat sous forme ensembliste et d'espace vectoriel engendré.

   Plusieurs d'entre vous ne savent pas donner les solutions dans le cas où $\Delta < 0$. D'ailleurs, au passage on pouvait calculer Δ mais l'on pouvait aussi trouver les solutions de l'équation caractéristique directement.

6. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Déterminer $\mathscr{S}_F$ l'ensemble des solutions réelles de (F).

   Question plus dure mais un lot très correct de belles réponses.

Partie 3 : Résolution de (E) $\boxed{\textbf{15 pt}}$

7. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Soit $\mathscr{S}_{poly} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Déterminer toutes les fonctions de $\mathscr{S}_{poly}$ qui sont solutions de (E).

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On pose

$$z : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(t)y\left(\cos(t)\right) \end{array}$$

8. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Justifier proprement que z est bien définie puis justifier que z est deux fois dérivable.

   Une ou deux bonnes réponses. Vous avez sous-estimé la question. Dire uniquement « comme composée de fonctions qui le sont » ne fonctionne pas, il faut avoir conscience de ce que signifie une composée.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer z' et z'' sur J.
   Très peu de bonnes réponses, là aussi la dérivée d'une composée à beaucoup poser problème.

10. $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire l'équivalence suivante :
   $$z \text{ solution de } (F) \qquad \Leftrightarrow \qquad y \text{ solution de } (E).$$
   Deux ou trois belles réponses. Non traitée sinon.

11. $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E).
   On pourra admettre que $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$ *et* $\sin(3t) = \big(4\cos^2(t) - 1\big)\sin(t)$.
   Non réussie.

12. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Vérifier la cohérence du résultat avec la question 7.
   Non traitée.

Problème III - Matrices $\boxed{60 \text{ pt}}$

Pour tout $p \in [0;1]$, on pose $A = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'objectif est de calculer les puissances de A.

Partie 1 : Un cas particulier $\boxed{8 \text{ pt}}$

1. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer les valeurs de $p \in [0;1]$ pour lesquelles la matrice A est inversible.
   Pas mal de bonnes réponses. Pensez à bien justifier que A est triangulaire. Mais tout le monde n'avait malheureusement pas la réponse, dire $p = 1$ marche ne suffit pas.

2. On suppose dans cette question uniquement que $p = \frac{1}{2}$ et on pose $A_2 = 2A$.
   (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer A_2, A_2^2, A_2^3 et A_2^4.
   Bien dans l'ensemble.
   (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_2^n.
   On pourra observer que dans chaque matrice $a_{1,3} = a_{2,3} - a_{1,2}$.
   Plusieurs belles réponses, il fallait ensuite démontrer le résultat par récurrence.
   (c) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
   Moins bien traitée. Si $A = \frac{1}{2}A_2$, alors $A^n = \frac{1}{2^n}A_2^n$ et non $\frac{1}{2}A_2^n$.

Partie 2 : Méthode 1, par décomposition $\boxed{24 \text{ pt}}$

On suppose désormais et durant tout le reste du problème que $p \in \,]0;1[$ et on définit $B = \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = A - B$. Enfin, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer C.
   Cadeau.

4. **2 pt** Préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$, C^n.

   Certains sont partis loin avec le binôme de Newton alors qu'un simple calcul donnait $C^2 = O_3$. Attention à ne pas conclure $\forall n \in \mathbb{N}$, $C^n = O_3$ mais bien isoler le cas $n = 0$ et $n = 1$.

5. **2 pt** Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   Facile et bien réussie.

6. **2 pt** On pose $D = P^{-1}BP$. Sans utiliser l'expression de P^{-1} trouvée à la question précédente, montrer que $\mathrm{Tr}\,(D) = \mathrm{Tr}\,(B)$.

   Question plus dure et théorique. Allez voir le corrigé. Deux bonnes réponses.

7. **2+2 pt** Calculer D et vérifier le résultat de la question précédente.

   Quatre points faciles généralement bien obtenus.

8. **2 pt** Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de B^n en fonction de P, D^n, P^{-1} que l'on démontrera soigneusement.

   Pas mal de bonnes réponses. Quelques parachutages, une démonstration était exigée, et des confusions pour d'autres sur la formule elle-même.

9. **2 pt** En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, B^n exprimée en fonction de ses coefficients.

   Moins traitée et réussie.

10. **4 pt** En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de ses coefficients.

    Question plus longue, une petite poignée de réussite. A retravailler en cas d'échec.

11. **2 pt** Vérifier la cohérence de votre résultat avec la question 2.a pour $p = 1/2$ et $n = 3$.

    Une ou deux réponses justes.

12. **2 pt** La formule de la question 10. est-elle encore vraie pour $n = -1$?

    Aucune bonne réponse.

Partie 3 : Par division euclidienne **6 pt**

On se propose de calculer les puissances de B par une seconde méthode.

13. **2 pt** Calculer $B^2 - (1+p)\,B$.

    Facile mais plusieurs erreurs dans les réponses.

14. **2 pt** Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ et $R_n = \alpha_n X + \beta_n$ le reste et Q_n le quotient de la division euclidienne de X^n par $P = X^2 - (1+p)\,X + p$. Calculer α_n et β_n.

    Identique à l'exercice du TD mais très peu de réponses

15. **2 pt** Retrouver le résultat de la question 9.

    Non traitée.

Partie 4 : Méthode 2, par étude de suites **22 pt**

On ne pourra pas utiliser les résultats précédents, mais on pourra souligner au correcteur les cohérences trouvées.

16. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On utilisera dans la preuve l'égalité $A^{n+1} = A \times A^n$. Préciser également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les relations de récurrence de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n (établies au cours de la preuve).
 Deux trois bonnes réponses.

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = c_n - 1$.
 (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre d_{n+1} et d_n.
 Une ou deux bonnes réponses.
 (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Quelle est la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d_n puis c_n en fonction de n.
 Idem.

18. (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \frac{a_n}{p^n}$. Déterminer la nature de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
 Non traitée.
 (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de a_n en fonction de n.
 Non traitée.

19. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{E}_m = \{M \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R}) \mid MU = U\}$.
 (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Donner un exemple simple de matrice qui soit dans $\mathcal{E}_m$ et un exemple de matrice qui ne soit pas dans $\mathcal{E}_m$.
 Quelques tentatives mais des réponses dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. Une seule bonne réponse.
 (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que $\mathcal{E}_m$ est stable par multiplication : si $(M, N) \in \mathcal{E}_m^2$, alors $MN \in \mathcal{E}_m$.
 Non traitée.
 (c) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ alors exprimer les coefficients de MU en fonction des coefficients de M.
 Non traitée.

 On suppose à nouveau que $m = 3$.
 (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \mathcal{E}_3$.
 Non traitée.
 (b) $\boxed{\textbf{3 pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de b_n en fonction de n.
 Non traitée.