

Corrigé du Devoir Surveillé 10

Intégration et représentation matricielle

Problème I - Intégration

L'objectif du problème est de déterminer un équivalent de $n!$. La première partie établit un équivalent à une constante près sans déterminer la constante. La seconde partie consiste à calculer explicitement cette constante.

Partie 1 : un équivalent

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n} n^n e^{-n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de v_n et de u_n ,

$$\begin{aligned} v_n &= \ln \left(\frac{\sqrt{n+1} (n+1)^{n+1} e^{-n-1}}{(n+1)!} \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} \right) \\ &= \ln \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n} \frac{e^{-1}}{n+1} \right) \\ &= \ln \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \right) \\ &= -1 + \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. On sait que $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. En posant $n \rightarrow +\infty$, $u = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Donc

$$\begin{aligned} v_n &= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

3. On sait que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha > 2$. Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{12n^2}$ converge également. Or $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{12n^2} > 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n \text{ converge.}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ est une série télescopique. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n v_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = \ln(u_{n+1}) - \ln(e^{-1}) = \ln(u_{n+1}) - 1.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = e^{1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k}.$$

Or nous avons vu à la question précédente que $\left(\sum_{k=1}^n v_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Donc par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ de plus,

$$\boxed{C = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{1+S}}.$$

5. D'après la question précédente $C = e^{1+S} > 0$ (très important!!!). On a donc

$$u_n = \frac{\sqrt{nn^n} e^{-n}}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \quad \Leftrightarrow \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{C} \sqrt{nn^n} e^{-n}.$$

En posant $\alpha = \frac{1}{C} = e^{-1-S} > 0$, on obtient bien

$$\boxed{\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \sqrt{nn^n} e^{-n}.$$

Partie 2 : calcul de α

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt.$$

6. On a sans difficulté,

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad I_1 = 1.}$$

7. Calculons I_2 . Par linéarisation, on a

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2t)}{4} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $s = \frac{\pi}{2} - t$. Si $t = 0$, $s = \frac{\pi}{2}$ et si $t = \frac{\pi}{2}$, $s = 0$. La fonction $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ est \mathcal{C}^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $ds = -dt$ et donc par le théorème de changement de variable,

$$I_n = \int_{s=\frac{\pi}{2}}^{s=0} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - s \right) (-ds) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(s))^n ds.$$

car pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\sin \left(\frac{\pi}{2} - s \right) = \cos(s)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(s) ds.$$

9. Pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin(t) \geq 0.$$

Donc

$$\sin^n(t) \geq 0.$$

Par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$I_n \geq 0.$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geq 0.$$

10. Pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leq \sin(t) \leq 1.$$

Donc par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0; 1]$,

$$(1) \quad 0 \leq \sin^n(t) \leq 1.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$0 \leq I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,,

$$\text{la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée par } \frac{\pi}{2}.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu à la question précédente que $I_n \geq 0$. Procédons par l'absurde et supposons que $I_n = 0$. Alors la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est une fonction continue et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ (vu lors de l'inégalité (1) à la question précédente) et par hypothèse $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt = 0$. Donc par la propriété de séparation de l'intégrale, on en déduit que $t \mapsto \sin^n(t)$ est identiquement nulle sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Or pour $t = \frac{\pi}{2}$, on a $\sin^n \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 \neq 0$ ce qui est contradictoire. D'où, $I_n \geq 0$ et $I_n \neq 0$. Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n > 0.$$

12. On sait que pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leq \sin(t) \leq 1.$$

Donc pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t) \leq 1.$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

13. D'après la question précédente, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc par le théorème de convergence montone,

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On note ℓ sa limite.

14. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) On part à nouveau de l'inégalité énoncé précédemment que pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leq \sin^n(t) \leq 1.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, elle est notamment vérifiée pour tout $t \in [\frac{\pi}{2} - \varepsilon; \frac{\pi}{2}]$. Donc par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens : $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$),

$$0 \leq \int_{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \leq \int_{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \varepsilon.$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \leq \varepsilon.$$

(b) La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. La fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0; 1]$. Donc par composition, la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et donc sur est croissante sur $[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$. Ainsi, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$,

$$0 \leq \sin^n(t) \leq \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right).$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \sin^n(t) dt &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) dt = \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} 1 dt \\ &= \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Or, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$. De plus $\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \geq 0$ donc

$$\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \leq \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \sin^n(t) dt \leq \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \frac{\pi}{2}.$$

(c) Par la relation de Chasles,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \sin^n(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

Donc d'après les inégalités précédentes, on a

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \varepsilon + \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \frac{\pi}{2}.$$

Or par la stricte croissance de la fonction sinus sur $[0; \frac{\pi}{2}]$,

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < 1$$

Donc la suite $(\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \in]0; 1[$ et donc converge quand $n \rightarrow +\infty$ vers 0. On sait d'autre part que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Donc par passage à la limite dans (2), on obtient

$$\forall \varepsilon \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad 0 \leq \ell \leq \varepsilon.$$

(d) L'inégalité précédente étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, par le théorème d'encadrement que

$$\boxed{\ell = 0.}$$

15. On pose pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$u(t) = -\cos(t), \quad v(t) = \sin^{n+1}(t).$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$u'(t) = \sin(t), \quad v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t).$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \sin^{n+1}(t) dt \\ &= [-\cos(t) \sin^{n+1}(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t) (n+1)\cos(t) \sin^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^n(t) dt \quad \text{car dans } \sin^{n+1}(t), n+1 \geq 1 \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt \\ &= (n+1) \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t) dt \right] \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$I_{n+2} + (n+1) I_{n+2} = (n+1) I_n \quad \Leftrightarrow \quad (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.}$$

16. On a vu à la question 12. que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \leq 1$$

En injectant l'équation obtenue à la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n \leq 1$$

Or on a vu à la question 11. que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$. Donc par le théorème d'encadrement, on conclut que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1.}$$

17. (a) On procède par récurrence. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(p) \quad : \quad \ll I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \gg.$$

Montrons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Initialisation. Si $p = 0$,

$$\frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} = 1.$$

Donc par la question 6., $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ et montrons $\mathcal{P}(p+1)$. On a par la relation établie en 15.,

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)} = I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \stackrel{\text{H.R.}}{=} \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)^2} \times \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)}{4(p+1)^2} \times \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)!}{4^{p+1} ((p+1)!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(p+1))!}{4^{p+1} ((p+1)!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)+1} = I_{2p+3} &= \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} \stackrel{\text{H.R.}}{=} \frac{(2p+2)^2}{(2p+3)(2p+2)} \times \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \\ &= \frac{4^{p+1} ((p+1)!)^2}{(2p+3)!}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Conclusion,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

(b) Par la question précédente et la question 5., on a

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \sqrt{2p} (2p)^{2p} e^{-2p} \pi}{4^p (\alpha \sqrt{pp} e^{-p})^2 \frac{\pi}{2}} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \sqrt{2p} 4^p p^{2p} e^{-2p} \pi}{4^p \alpha^2 p \times p^{2p} e^{-2p} \frac{\pi}{2}} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2p} \pi}{\alpha p \frac{\pi}{2}} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\alpha \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

D'autre part, de la même façon, on a

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^p (\alpha \sqrt{pp} e^{-p})^2}{\alpha \sqrt{2p+1} (2p+1)^{2p+1} e^{-2p-1}} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^p \alpha^2 p \times p^{2p+1} e^{-2p}}{\alpha \sqrt{2p+1} (2p)^{2p+1} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{2p+1} e^{-2p-1}} \\ &\underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{2p+1} \times 2 \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{2p+1} e^{-1}}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{2p+1} &= e^{(2p+1)\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)} \underset{p \rightarrow +\infty}{=} e^{(2p+1)\left(\frac{1}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)} \\ &= e^{1+o(1)} \underset{p \rightarrow +\infty}{=} e^1 e^{o(1)} = e^1 (1 + o(1)) \underset{p \rightarrow +\infty}{=} e^1 + o(1) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} e^1. \end{aligned}$$

De plus $\sqrt{2p+1} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2p}$. Par conséquent,

$$I_{2p+1} \underset{p \rightarrow +\infty}{=} \frac{\alpha}{\sqrt{2p} \times 2e^{-1}e^{-1}} = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Conclusion, on a

$$I_{2p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\alpha\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

(c) Donc de la question précédente et par quotient d'équivalents,

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\alpha\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{p}} \times \frac{2\sqrt{2}}{\alpha} \sqrt{p} = \frac{2\pi}{\alpha^2}.$$

Conclusion,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{2\pi}{\alpha^2}.$$

18. Or d'après la question 16., la limite de $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$ quand p tend vers $+\infty$ vaut 1. Donc par unicité de la limite,

$$\frac{2\pi}{\alpha^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = 2\pi.$$

De plus par la question 5., $\alpha = \frac{1}{C} = e^{-1-S} > 0$. Conclusion,

$$\alpha = \sqrt{2\pi}.$$

Joli non ?

Problème II - Représentation matricielle

On considère

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7a - 5c & 3b - 3d \\ -5a + 7c & -3b + 3d \end{pmatrix}.$$

On admet que f est linéaire.

1. On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

la famille $\mathcal{C} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

2. On observe que

$$f(E_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{2}E_1 - \frac{5}{2}E_3.$$

Donc la première colonne de A est $\begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \\ -5/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. De même,

$$f(E_2) = \frac{3}{2}E_2 - \frac{3}{2}E_4, \quad f(E_3) = -\frac{5}{2}E_1 + \frac{7}{2}E_3, \quad f(E_4) = -\frac{3}{2}E_2 + \frac{3}{2}E_4.$$

Conclusion,

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 u \in \text{Ker}(A) &\Leftrightarrow Au = 0_{\mathbb{R}^4} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5z = 0 \\ 3y - 3t = 0 \\ -5x + 7z = 0 \\ -3y + 3t = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5z = 0 \\ y - t = 0 \\ (7 - \frac{25}{7})z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{7}L_1 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{3}L_4 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5z = 0 \\ y - t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{car } L_4 = L_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = t \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow u = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ y \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_K} \right).$$

On note que u_K est non nul et donc forme une famille libre et engendre $\text{Ker}(A)$ donc u_k est une base de $\text{Ker}(A)$. Puisque f est canoniquement associée à A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

4. Par la question précédente, (u_K) est une base de $\text{Ker}(A)$. Donc

$$\dim(\text{Ker}(A)) = 1.$$

Par le théorème du rang matriciel, on en déduit que

$$\text{rg}(A) = 4 - \dim(\text{Ker}(A)) = 4 - 1 = 3.$$

Toute base de $\text{Im}(A)$ sera donc constituée de trois vecteurs. On a

$$\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

On note que $C_4 = -C_2$, on peut donc ôter C_4 (ce qui est cohérent avec le rang observé).

$$\text{Im}(A) = \text{Vect} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

De plus, les opérations élémentaires ne modifiant pas l'espace engendré, on a

$$\begin{aligned} \text{Im}(A) &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && \begin{aligned} C_1 &\leftarrow 2C_1 \\ C_2 &\leftarrow \frac{2}{3}C_2 \\ C_3 &\leftarrow 2C_3 \end{aligned} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow \frac{1}{2}C_1 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && C_3 \leftarrow \frac{1}{12}(C_3 + 5C_1) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ &\underbrace{\hspace{10em}}_{=\mathcal{B}_I} \end{aligned}$$

La famille \mathcal{B}_I engendre $\text{Im}(A)$. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = O_2.$$

Alors,

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ -d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc \mathcal{B}_I est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B}_I = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(A).$$

Puisque f est canoniquement associée à A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\mathcal{B}'_I = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = (E_1, E_2 - E_4, E_3) \text{ est une base de } \text{Im}(f).$$

On pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

5. On observe que $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}E_3$. Donc $\text{mat}_\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. De même pour les autres vecteurs. Conclusion,

$$P = \text{mat}_\varphi(\mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Méthode 1, par la représentation matricielle.* On a

$$P \underset{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{1}{2}(L_3 + L_1) \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}(L_2 + L_4) \end{array}.$$

La matrice obtenue est triangulaire avec aucun zéro sur la diagonale. Donc P est inversible. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est un base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Méthode 2, par le rang. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathcal{B}) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & \forall i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, C_i \leftarrow \sqrt{2}C_i \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right) & \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{array} \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & \begin{array}{l} C_3 \leftarrow -\frac{1}{2}C_3 \\ C_4 \leftarrow -\frac{1}{2}C_4 \end{array} \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) & \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_4 \end{array} \\ &= 4 \end{aligned}$$

car on reconnaît la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\text{rg}(\mathcal{B}) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \text{Card}(\mathcal{B})$. Donc \mathcal{B} est libre et génératrice, conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est un base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Méthode 3, par la liberté. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = O_2.$$

Alors

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 0 \\ -a + c = 0 \\ -b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 0 \\ 2c = 0 \\ 2d = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2. \end{array}$$

Donc $a = b = c = d = 0$. Donc \mathcal{B} est libre. De plus $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

7. On a les égalités entre matrices suivantes :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) && \text{par linéarité} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7+5 & 0 \\ -5-7 & 0 \end{pmatrix} && \text{par définition de } f \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = 6e_1. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f(e_2) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 3+3 \\ 0 & -3-3 \end{pmatrix} = 3e_2 \\ f(e_3) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7-5 & 0 \\ -5+7 & 0 \end{pmatrix} = e_3 \\ f(e_4) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 3-3 \\ 0 & -3+3 \end{pmatrix} = O_2 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(e_1) = 6e_1, \quad f(e_2) = 3e_2, \quad f(e_3) = e_3, \quad f(e_4) = O_2.}$$

On en déduit alors directement que

$$\boxed{D = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

8. On a vu que $f(e_4) = O_2$. Donc e_4 est un vecteur non nul de $\text{Ker}(f)$. Or on sait également que $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. Conclusion,

$$\boxed{(e_4) \text{ est une base de } \text{Ker}(f).}$$

On observe les points suivants :

- Puisque $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est une sous-famille de \mathcal{B} et que \mathcal{B} est une base et donc libre, on en déduit que \mathcal{B}_0 est une famille libre.
- De plus, on a $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 3$. Donc $\dim(\text{Im}(f)) = 3 = \text{Card}(\mathcal{B}_0)$.
- Enfin montrons que \mathcal{B}_0 est une famille de vecteurs de $\text{Im}(f)$ (*important!*). Puisque $f(e_1) = 6e_1$, alors, par linéarité de f ,

$$e_1 = \frac{1}{6} f(e_1) = f\left(\frac{e_1}{6}\right).$$

Donc $e_1 \in \text{Im}(f)$. De même, $e_2 = f\left(\frac{e_2}{3}\right) \in \text{Im}(f)$ et $e_3 = f(e_3) \in \text{Im}(f)$. Donc \mathcal{B}_0 est bien une famille de vecteurs de $\text{Im}(f)$.

Conclusion,

$$\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \text{Im}(f).$$

9. Par la formule de changement de base, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{i.e.} \quad D = P^{-1}AP.$$

Comment aurions-nous pu nous tromper sur cette formule ?

10. Inutile de calculer P^{-1} ! Il suffit de montrer que $PP^T = I_4$. On a

$$PP^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_4.$$

Conclusion,

$$P^{-1} = P^T.$$

11. Calculons,

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= P^TAP = P^T \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\text{on retrouve bien le résultat de la question 7..}}$

12. On a vu dans les questions précédentes que

- (e_1, e_2, e_3) est une base de $\text{Im}(f)$,
- (e_4) est une base de $\text{Ker}(f)$,
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Directement, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

13. Soit E un espace vectoriel. Soient p un projecteur de E et g un endomorphisme de E .

- (a) Supposons que $g \circ p = g$. Montrons que $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g)$. Soit $x \in \text{Ker}(p)$. Alors $p(x) = 0_E$. Donc en composant par g , $g(p(x)) = g(0_E) = 0_E$ car g linéaire. Donc $g \circ p(x) = 0_E$. Or $g \circ p = g$. Donc

$$g(x) = g \circ p(x) = 0_E.$$

Donc $x \in \text{Ker}(g)$. Ceci étant vrai pour $x \in \text{Ker}(p)$ quelconque, on en déduit que $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g)$ et donc

$$g \circ p = g \quad \Rightarrow \quad \text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g).$$

Réciproquement, supposons que $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g)$. Montrons que $g \circ p = g$. Soit $x \in E$. Puisque p est un projecteur, on sait que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$. Donc il existe $x_1 \in \text{Ker}(p)$ et $x_2 \in \text{Im}(p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Dès lors,

$$\begin{aligned} g \circ p(x) &= g \circ p(x_1 + x_2) \\ &= g(p(x_1) + p(x_2)) && \text{par linéarité} \\ &= g(p(x_2)) && \text{car } x_1 \in \text{Ker}(p) \\ &= g(x_2) && \text{car } x_2 \in \text{Im}(p) = \{u \in E \mid p(u) = u\} \text{ car } p \text{ est un projecteur.} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$g(x) = g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2).$$

Or $x_1 \in \text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g)$. Donc $g(x_1) = 0_E$. Ainsi,

$$g(x) = g(x_2) = g \circ p(x).$$

Ceci étant vrai pour $x \in E$ quelconque, on en déduit que $g = g \circ p$ et donc

$$\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g) \quad \Rightarrow \quad g \circ p = g.$$

Conclusion,

$$\boxed{g \circ p = g \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g).}$$

- (b) Supposons $p \circ g = g$. Soit $y \in \text{Im}(g)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Montrons que $y \in \text{Im}(p)$ sachant que $\text{Im}(p) = \{u \in E \mid p(u) = u\}$ car p est un projecteur. On a

$$p(y) = p(g(x)) = p \circ g(x) = g(x) = y.$$

Donc $y \in \text{Im}(p)$. Ceci étant vrai pour $y \in \text{Im}(g)$ quelconque, on en déduit que $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(p)$ et donc

$$p \circ g = g \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(g) \subset \text{Im}(p).$$

Réciproquement, supposons $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(p)$. Montrons que $p \circ g = g$. Soit $x \in E$. Alors $y = g(x) \in \text{Im}(g) \subset \text{Im}(p)$. Or puisque p est un projecteur, $\text{Im}(p) = \{u \in E \mid p(u) = u\}$. Donc $p(y) = y$ i.e.

$$p(g(x)) = g(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $p \circ g = g$ et donc

$$\text{Im}(g) \subset \text{Im}(p) \quad \Rightarrow \quad p \circ g = g.$$

Conclusion,

$$\boxed{p \circ g = g \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im}(g) \subset \text{Im}(p).}$$

14. Puisque q est la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$, on en déduit directement que $\text{Ker}(q) = \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(q) = \text{Im}(f)$. En particulier, $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(f)$. Donc par la question 13.a $f \circ q = f$. De même $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(q)$ donc $q \circ f = f$. Ainsi,

$$\boxed{q \circ f = f = f \circ q.}$$

15. On pose $F = \text{Im}(f)$. On note f_0 la restriction de f sur F autrement dit l'application définie par

$$\forall x \in F = \text{Im}(f), \quad f_0(x) = f(x).$$

(a) Montrons que f_0 est bien définie, à valeurs dans F et linéaire.

- Puisque $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, f est bien définie sur F et donc par construction f_0 aussi.
- Soit $x \in F$. Montrons que $f_0(x) \in F$. Par définition, $f_0(x) = f(x) \in \text{Im}(f) = F$. Donc f_0 va bien de F dans F .
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in F$. Posons $z = \lambda x + \mu y$. Puisque F est un espace vectoriel (car $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), on en déduit que $z \in F$ et donc $f_0(z)$ existe. De plus,

$$f_0(z) = f_0(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \text{par linéarité de } f.$$

Or $x \in F$ et $y \in F$ donc $f(x) = f_0(x)$ et $f(y) = f_0(y)$. Ainsi,

$$f_0(\lambda x + \mu y) = \lambda f_0(x) + \mu f_0(y).$$

Donc f_0 est linéaire.

Conclusion,

$$\boxed{f_0 \text{ est un endomorphisme de } F.}$$

(b) Par ce qui précède, on a $f_0(e_1) = f(e_1) = 6e_1$ mais aussi $f_0(e_2) = 3e_2$ et $f(e_3) = e_3$. Conclusion,

$$\boxed{D_0 = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(f_0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Problème III - Intégration et représentation matricielle

On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt.$$

Partie 1 : Une équation différentielle vérifiée par f

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ est définie et même continue sur $[0; 1]$ car pour tout $t \in [0; 1]$, $x+t \geq x > 0$. Donc $\int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt$ est bien définie i.e. $f(x)$ existe. On a donc précisé que pour tout $x > 0$, $f(x)$ existe et par conséquent

$$\text{la fonction } f \text{ est bien définie sur }]0; +\infty[.$$

De plus pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0; 1]$, $x+t > 0$ et $e^t > 0$. Donc par croissance de l'intégrale, car $0 \leq 1$,

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt \geq \int_0^1 0 dt = 0.$$

Conclusion,

$$\forall x > 0, \quad f(x) \geq 0.$$

2. Soit $x > 0$. Par le changement de variable $u = x+t$, $t = u-x$, la fonction $u \mapsto u-x$ est \mathcal{C}^1 et $dt = du$. Par conséquent, on a

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt = \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u} du = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du.$$

Conclusion,

$$\forall x > 0, \quad f(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du.$$

3. La fonction $g : u \mapsto \frac{e^u}{u}$ est définie et continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Soit G une primitive de g sur \mathbb{R}_+^* . Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = e^{-x} (G(x+1) - G(x)).$$

G est une primitive de g et g est continue sur \mathbb{R}_+^* donc G est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Donc par produit et différence,

$$\text{la fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0; +\infty[.$$

4. Avec les notations de la question précédente, on a vu que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a

$$f(x) = e^{-x} (G(x+1) - G(x)).$$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -e^{-x} (G(x+1) - G(x)) + e^{-x} (G'(x+1) - G'(x)) = -f(x) + e^{-x} (g(x+1) - g(x)).$$

Donc par définition de g , pour tout $x > 0$,

$$f'(x) + f(x) = e^{-x} \left(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x} \right) = \frac{e^{-x+x+1}}{x+1} - \frac{e^{-x+x}}{x}.$$

Conclusion,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) + f(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

5. Soit

$$(E_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = 0$$

l'équation différentielle homogène associée. La fonction $a : x \mapsto 1$ est continue sur \mathbb{R} donc admet des primitives sur \mathbb{R} dont l'une est donnée par $A : x \mapsto x$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C e^{-x} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \end{array} \right).$$

Procédons à la méthode de variation de la constante. Fixons

- $y_0 : x \mapsto e^{-x}$
- y une fonction dérivable sur \mathbb{R}
- $\lambda = \frac{y}{y_0}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) \neq 0$.

La fonction λ est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas et $y = \lambda y_0$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) : \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x^2 + 2x + 5} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \lambda(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathcal{S}_0} = \frac{e^{-x}}{x^2 + 2x + 5} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^2 + 2x + 5} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{(x+1)^2 + 4}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 + 4 > 0$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2 + 4}$ est continue sur \mathbb{R} et l'une de ses primitives est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right) + C \\ \Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda(x)y_0(x) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right) e^{-x} + C e^{-x}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x+1}{2} \right) e^{-x} + C e^{-x} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Partie 2 : Comportement en 0^+ .

On définit pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t + x} dt$.

6. La fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} donc sur $[0; 1]$. Par conséquent, pour tout $t \in [0; 1]$, $0 \leq e^t - e^0 = e^t - 1$. De plus la fonction exponentielle est \mathcal{C}^1 sur $[0; 1]$ (et même \mathcal{C}^∞) donc, par le théorème des accroissements finis, pour tout $t \in [0; 1]$,

$$0 \leq e^t - 1 = |e^t - e^0| \leq \sup_{s \in [0; t]} |e^s| |t - 0| \leq \sup_{s \in [0; 1]} |e^s| t = et.$$

En posant $M = e > 0$, on conclut que

$$\boxed{\forall t \in [0; 1], \quad 0 \leq e^t - 1 \leq et.}$$

7. Soit $x > 0$. Par la question précédente et la croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t + x} dt \leq \int_0^1 \frac{et}{t + x} dt.$$

De plus, pour tout $t \in [0; 1]$, $t + x \geq t \Leftrightarrow \frac{t}{t+x} \leq 1$ donc pour tout $t \in [0; 1]$, $\frac{et}{t+x} \leq e$. Ainsi, toujours par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^1 e dt = e.$$

Ceci étant vrai pour tout $x > 0$, on en déduit que

$$\boxed{g \text{ est une fonction bornée sur }]0; +\infty[.}$$

8. Soit $x > 0$. Par définition de f et de g , on a

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt + \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = g(x) + \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt.$$

Donc par la question précédente, en rappelant que $M = e$, on a

$$\int_0^1 \frac{1}{x+t} dt \leq f(x) \leq e + \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt &= [\ln(x+t)]_{t=0}^{t=1} && \text{car } x+t > 0 \\ &= \ln(x+1) - \ln(x) \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right). \end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq f(x) \leq e + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).}$$

9. On observe que

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{\sim} -\ln(x).$$

Notamment $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{+} +\infty$ et donc $e \ll \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. Ainsi,

$$e + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{\sim} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{\sim} -\ln(x).$$

Donc par la question précédente et par le théorème d'encadrement pour les équivalents, on conclut que

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{\sim} -\ln(x).}$$

Partie 3 : Un endomorphisme

Pour toute fonction f continue sur \mathbb{R} , on pose $\varphi(f) : x \mapsto e^{-x} \int_x^{x+1} f(t) e^t dt$.

10. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est continue sur \mathbb{R} donc sur $[x; x+1]$ donc $t \mapsto f(t) e^t$ est aussi continue sur $[x; x+1]$ et donc $\int_x^{x+1} f(t) e^t dt$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(f)$ est bien définie sur \mathbb{R} . La fonction $t \mapsto f(t) e^t$ étant continue sur \mathbb{R} elle admet des primitives sur \mathbb{R} . Soit F une primitive de $t \mapsto f(t) e^t$ sur \mathbb{R} . Par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = e^{-x} (F(x+1) - F(x)).$$

Puisque $t \mapsto f(t) e^t$ est continue sur \mathbb{R} , F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Donc par produit et différence, $\varphi(f)$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc notamment continue sur \mathbb{R} . Donc pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\varphi(f) \in \mathcal{C}(f)$. Donc φ va bien de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant que φ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(h)(x) &= e^{-x} \int_x^{x+1} h(t) e^t dt \\ &= e^{-x} \int_x^{x+1} (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^t dt \\ &= e^{-x} \left(\lambda \int_x^{x+1} f(t) e^t dt + \mu \int_x^{x+1} g(t) e^t dt \right) && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda e^{-x} \int_x^{x+1} f(t) e^t dt + \mu e^{-x} \int_x^{x+1} g(t) e^t dt \\ &= \lambda \varphi(f)(x) + \mu \varphi(g)(x). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$ et donc φ est linéaire. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{R})), \varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{C}(\mathbb{R}).}$$

Pour tout fonction polynomiale f , on admet que $\varphi(f)$ est aussi une fonction polynomiale. On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et pour tout polynôme P , on note \tilde{P} la fonction polynomiale associée. On définit alors $\varphi(P)$ comme le polynôme associé à la fonction polynomiale $\varphi(\tilde{P})$. On admet que φ définit un endomorphisme sur E .

11. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\tilde{1})(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} 1 \times e^t dt = e^{-x} [e^t]_{t=x}^{t=x+1} = e^{-x} (e^{x+1} - e^x) = e - 1.$$

Donc

$$\varphi(1) = e - 1.$$

De même,

$$\varphi(\tilde{X})(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} t \times e^t dt.$$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = e^t$ et $v(t) = t$. Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} donc sur $[x; x+1]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = e^t$ et $v'(t) = 1$. Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{X})(x) &= e^{-x} \left([t e^t]_{t=x}^{t=x+1} - \int_x^{x+1} e^t dt \right) \\ &= e^{-x} ((x+1) e^{x+1} - x e^x) - \varphi(\tilde{1})(x) \\ &= (x+1) e - x - (e - 1) \\ &= (e - 1) x + 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\varphi(X) = (e-1)X + 1.$$

Enfin,

$$\varphi(\tilde{X}^2)(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} t^2 \times e^t dt.$$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = e^t$ et $v(t) = t^2$. Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{N}$, $u'(t) = e^t$ et $v'(t) = 2t$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{X}^2)(x) &= e^{-x} \left([t^2 e^t]_{t=x}^{t=x+1} - \int_x^{x+1} 2t e^t dt \right) \\ &= e^{-x} \left((x+1)^2 e^{x+1} - x^2 e^x \right) - 2\varphi(\tilde{X})(x) \\ &= e(x^2 + 2x + 1) - x^2 - 2(e-1)x - 2 \\ &= (e-1)x^2 + 2x + e - 2. \end{aligned}$$

D'où,

$$\varphi(X^2) = (e-1)X^2 + 2X + e - 2.$$

Par ces calculs, on conclue que

$$A = \text{mat}_{\mathcal{E}_{can}}(f) = \begin{pmatrix} e-1 & 1 & e-2 \\ 0 & e-1 & 2 \\ 0 & 0 & e-1 \end{pmatrix}.$$

12. On pose $N = A - (e-1)I_3$. On a

$$N = \begin{pmatrix} e-1 & 1 & e-2 \\ 0 & e-1 & 2 \\ 0 & 0 & e-1 \end{pmatrix} - (e-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e-1 & 0 \\ 0 & 0 & e-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & e-2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & e-2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & e-2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & e-2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{N \text{ est nilpotente d'ordre } 3.}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A = (e-1)I_3 + N$. Or N et I_3 commutent, donc par la formule du binôme de Newton,

$$A^n = ((e-1)I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (e-1)^{n-k} I_3^{n-k}$$

Puisque pour tout $k \geq 3$, $N^k = O_3$, si $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= \binom{n}{0} (e-1)^n I_3 + \binom{n}{1} (e-1)^{n-1} N + \binom{n}{2} (e-1)^{n-2} N^2 + O_3 \\ &= (e-1)^n I_3 + \begin{pmatrix} 0 & n(e-1)^{n-1} & n(e-2)(e-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 2n(e-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2n(n-1)}{2}(e-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (e-1)^n & n(e-1)^{n-1} & n(e^2 - 3e + n + 1)(e-1)^{n-2} \\ 0 & (e-1)^n & 2n(e-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (e-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $n = 1$, on a

$$\begin{pmatrix} (e-1)^n & n(e-1)^{n-1} & n(e^2-3e+n+1)(e-1)^{n-2} \\ 0 & (e-1)^n & n(e-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (e-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 & 1 & \frac{e^2-3e+2}{e-1} \\ 0 & e-1 & 2 \\ 0 & 0 & e-1 \end{pmatrix} = A.$$

Donc la formule reste vraie pour $n = 1$ et de même si $n = 0$, on obtient bien I_3 . Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} (e-1)^n & n(e-1)^{n-1} & n(e^2-3e+n+1)(e-1)^{n-2} \\ 0 & (e-1)^n & 2n(e-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (e-1)^n \end{pmatrix}.$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $V_n = \text{mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\varphi^n(X-3))$ et $U = \text{mat}_{\mathcal{B}_{can}}(X-3)$. Dès lors,

$$V_n = A^n U.$$

Or $U = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} V_n &= \begin{pmatrix} (e-1)^n & n(e-1)^{n-1} & n(e^2-3e+n+1)(e-1)^{n-2} \\ 0 & (e-1)^n & 2n(e-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (e-1)^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n(e-1)^{n-1} - (e-1)^n \\ (e-1)^n \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (n-e+1)(e-1)^{n-1} \\ (e-1)^n \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n(X-3) = (e-1)^n X + (n-e+1)(e-1)^{n-1} = (e-1)^n \left(X + \frac{n-e+1}{e-1} \right).$$

FIN