

Commentaires du DS10 Intégration, représentation matricielle

Index des raccourcis :

- TB : très bien
- AE : à encadrer
- NJ : non justifié
- PC : pas clair
- Pq? : pourquoi?
- D? : Dérivabilité?
- VND : Variable non définie

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{50}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3	Total	Note finale	
Moyenne	-1,6	1,8	8	9,8	14,3	2,7	0,3	0,5	3,5	26,1	8,89	
Sur		10	40	50	40	16	9	15	40	130	20	20

TOTAL : 130 pt

Problème I - Intégration **50 pt**

L'objectif du problème est de déterminer un équivalent de $n!$. La première partie établit un équivalent à une constante près sans déterminer la constante. La seconde partie consiste à calculer explicitement cette constante.

Partie 1 : un équivalent **10 pt**

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

1. **2 pt** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$v_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Une bonne moitié de bonnes réponses. C'est juste du calcul, il faut pouvoir aboutir.

2. **2 pt** En déduire un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Aucune bonne réponse!!! Il faut absolument savoir résoudre cette question, il s'agit d'un simple DL même si l'ordre doit être un peu poussé.

3. **2 pt** Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge. On note S sa somme totale.

Très peu de bonnes réponses vu que la question précédente n'a pas été réussie. J'ai mis quelques points de cohérence mais peu souvent finalement, cette question là aussi très classique a été mal réussie. J'ai vu des affirmations telles que « $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ converge » et d'autres.

4. **2 pt** En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On notera C sa limite. Exprimer C en fonction de S .
Une très belle réponse. Peu traitée sinon.
5. **2 pt** En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \sqrt{nn^n} e^{-n}.$$

Idem.

Partie 2 : calcul de α **40 pt**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt.$$

6. **1,5+1,5 pt** Calculer I_0 et I_1 .

Bien, une seule mauvaise réponse.

7. **2 pt** Calculer I_2 .

Une seule bonne réponse (félicitations Lilian!). A revoir pour les autres la questions est classique sans grosse difficulté lorsque l'on sait partir.

8. **2 pt** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$.

Très peu de bonnes réponses. Pensez-bien que le changement de variable $s = \frac{\pi}{2} - t$ permet de transformer un cosinus en sinus et inversement.

9. **2 pt** Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive.

Bien globalement. Quelques réponses mal rédigées. N'oubliez pas de détailler les étapes : d'abord le sinus est positif, puis on élève à la puissance n (c'est juste une implication pas une équivalence!), puis on utilise la croissance de l'intégrale, et il faut la citer. Vous pensez bien la plupart du temps à mentionner les bornes dans le bon sens.

10. **2 pt** Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Idem. Quelques points de difficulté pour comprendre ce que signifie être majorée pour une suite.

11. **3 pt** Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

Aucune bonne réponse. La question n'est pas simple mais il faut savoir la faire à l'aide du théorème de séparation de l'intégrale.

12. **2 pt** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

Quelques bonnes réponses mais pas assez au global.

13. **2 pt** En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On notera ℓ sa limite.

Bien. On ne demande pas ℓ ici. N'oubliez pas de bien citer le théorème de convergence monotone.

14. Soit $\varepsilon \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

(a) **2 pt** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \leq \varepsilon.$$

Peu traitée, une petite poignée de bonnes réponses.

(b) **2 pt** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(t) dt \leq \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \frac{\pi}{2}.$$

Idem. Le passage de $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ à $\frac{\pi}{2}$ dans le majorant a posé des difficultés.

(c) **2 pt** En déduire que

$$0 \leq \ell \leq \varepsilon.$$

Quelques belles réponses bien rédigées.

(d) **1 pt** Conclure sur la valeur de ℓ .

Question facile mais très peu traitée.

15. **2 pt** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Non réussie. A retravailler.

16. **3 pt** En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1.$$

Une unique très jolie réponse (bravo Axel).

17. (a) **2 pt** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Non traitée.

(b) **2+2 pt** A l'aide de la question 5., déterminer un équivalent simple en fonction de α de I_{2p} puis de I_{2p+1} quand p tend vers $+\infty$.

Non réussie.

(c) **2 pt** En déduire la limite de $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$ en fonction de α .

Non traitée.

18. **2 pt** Conclure sur la valeur de α .

Non traitée.

Problème II - Représentation matricielle 40 pt

On considère

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7a - 5c & 3b - 3d \\ -5a + 7c & -3b + 3d \end{pmatrix}.$$

On admet que f est linéaire.

1. 2 pt Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On la notera \mathcal{C} .
Bien. Attention à faire une phrase dans la réponse. Quelques erreurs ce qui est inquiétant.
2. 2 pt Déterminer $A = \text{mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
Bien globalement. Là aussi, plusieurs étudiants ne parviennent pas à résoudre cette question proprement.
3. 2+1 pt Déterminer le noyau de A . En déduire le noyau de f .
Bien pour le noyau de A mais beaucoup pensent que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f)$. A bien revoir. Plusieurs bonnes réponses quand même.
4. 1+2+1 pt Préciser le rang de A puis une base de l'image de A . En déduire une base de l'image de f .
Là aussi beaucoup d'approximations. La dimension du noyau est parachutée, le théorème du rang n'est pas cité, l'image de A est donnée mais la justification de la base ne l'est pas. Là encore $\text{Im}(f) \neq \text{Im}(A)$.

On pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

5. 2 pt Préciser $P = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.
Bien, attention à mettre une petite phrase explicative.
6. 2 pt Montrer que \mathcal{B} est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Beaucoup de méthodes. On pouvait montrer que P est inversible. Plusieurs l'ont bien vu.
7. 1+2 pt Pour tout $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, calculer $f(e_i)$. En déduire $D = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Le calcul des $f(e_i)$ est facile mais beaucoup ne parviennent pas à en déduire D . Cette question est centrale dans ce chapitre.
8. 1+2 pt Montrer que (e_4) est une base de $\text{Ker}(f)$ et $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\text{Im}(f)$.
Beaucoup de forçages, car certains essaient cette question alors qu'ils ont un mauvais noyau ou une image erronée.
9. 1 pt Sans calcul, préciser le lien entre A , D , P et P^{-1} .
Bien, une seule mauvaise réponse. Attention à écrire une petite phrase.
10. 2 pt Vérifier que $P^{-1} = P^T$.
Beaucoup de pivot. Cela marche mais c'est plus long, le plus simple est de vérifier que $PP^T = I_3$ comme dans le DS précédent! Mais encore faut-il avoir corrigé son DS précédent à temps...
11. 2 pt Retrouver alors la valeur de D .
Plusieurs bonnes réponses. Question élémentaire d'un simple produit matriciel.

12. **2 pt** Justifier que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note alors q la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

Assez simple mais très peu traitée. Quelques réussites.

13. Soit E un espace vectoriel. Soient p un projecteur de E et g un endomorphisme de E .

(a) **3 pt** Montrer que $g \circ p = g \iff \text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(g)$.

Non traitée.

(b) **3 pt** Montrer que $p \circ g = g \iff \text{Im}(g) \subset \text{Im}(p)$.

Non traitée.

14. **2 pt** En déduire que $q \circ f = f \circ q$.

Deux ou trois bonnes réponses.

15. On pose $F = \text{Im}(f)$. On note f_0 la restriction de f sur F autrement dit l'application définie par

$$\forall x \in F = \text{Im}(f), \quad f_0(x) = f(x).$$

(a) **2 pt** Justifier que f_0 est un endomorphisme de F .

Une ou deux bonnes réponses.

(b) **2 pt** Préciser D_0 la matrice de f_0 dans la base \mathcal{B}_0 .

Idem.

Problème III - Intégration et représentation matricielle **40 pt**

On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt.$$

Partie 1 : Une équation différentielle vérifiée par f **16 pt**

1. **2+2 pt** Justifier que f est définie sur $]0; +\infty[$ et déterminer son signe.

Une seule bonne réponse pour l'existence de f . Il fallait fixer $x > 0$ puis parler de la continuité (et non juste définie) de la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ (et non $x \mapsto \frac{e^t}{x+t}$) sur $[0; 1]$ et non \mathbb{R}_+^* . Trop de confusions, à bien revoir, la réponse n'est pas difficile une fois que l'on sait ce qu'il faut faire. Sur la positivité, la rédaction est souvent trop rapide et vous êtes trop nombreux à dire $\frac{e^t}{x+t} > 0$ implique $f(x) > 0$. Aucun théorème du cours ne donne gratuitement de la stricte positivité.

2. **2 pt** Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du.$$

Assez bien, techniquement c'est globalement sans souci mais vous êtes très peu à donner l'hypothèse \mathcal{C}^1 !!

3. **3 pt** Justifier soigneusement que f est \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

Mieux. Peu de bonnes réponses mais plusieurs pensent bien ici à invoquer le théorème fondamental de l'analyse. Attention à ne pas poser $F : x \mapsto \int_0^x \frac{e^u}{u} du$ car la borne en 0 est interdite vu que la fonction $u \mapsto \frac{e^u}{u}$ n'est pas définie en 0. Attention à ne pas appliquer le théorème fondamental à $t \mapsto \frac{e^t}{x+t}$ car cette fonction dépend aussi de x !

4. **2 pt** Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) + f(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$.
 Une grosse poignée de bonnes réponses.

5. **2+3 pt** (*Question indépendante*) Résoudre l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + 2x + 5}$$

Classique!! Très très peu traitée. Il y avait deux points pour l'ensemble des solutions homogènes et trois de plus pour la méthode de variation de la constante. Une belle réponse et deux autres réponses seulement donnant l'ensemble des solutions homogènes.

Partie 2 : Comportement en 0^+ **9 pt**

On définit pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t + x} dt$.

6. **3 pt** Justifier qu'il existe $M > 0$ (à déterminer) telle que

$$\forall t \in [0; 1], \quad 0 \leq e^t - 1 \leq Mt.$$

Une seule réponse pense à raison au théorème des accroissements finis. Quelques tentatives sinon mais aucun autre succès.

7. **2 pt** En déduire que g est une fonction bornée sur $]0; +\infty[$.

Beaucoup de bricolage approximatif. Attention pour que B soit un majorant de g , il faut que B soit indépendant de x !!

8. **2 pt** Montrer alors que pour tout $x > 0$,

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq f(x) \leq M + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Non réussie à une ou deux exceptions près.

9. **2 pt** En déduire un équivalent simple de f en 0^+ .

Une seule bonne réponse. Beaucoup on regarde x en $+\infty$. Lisez attentivement la consigne.

Partie 3 : Un endomorphisme **15 pt**

Pour toute fonction f continue sur \mathbb{R} , on pose $\varphi(f) : x \mapsto e^{-x} \int_x^{x+1} f(t) e^t dt$.

10. **3 pt** Montrer proprement que φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Une seule (à peu près) bonne réponse pour montrer que f va de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. La linéarité rapportait 1,5 point et était bien plus facile. Attention cependant à ne pas confondre $\varphi(f)$ qui est une fonction de $\varphi(f)(x)$ qui est un nombre. Par exemple $e^{-x} \int_x^{x+1} f(t) e^t dt = \varphi(f)(x)$ et non $\varphi(f)$.

Pour toute fonction polynomiale f , on admet que $\varphi(f)$ est aussi une fonction polynomiale. On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et pour tout polynôme P , on note \tilde{P} la fonction polynomiale associée. On définit alors $\varphi(P)$ comme le polynôme associé à la fonction polynomiale $\varphi(\tilde{P})$. On admet que φ définit un endomorphisme sur E .

11. **2+2 pt** Déterminer A la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}_{can} = (1, X, X^2)$.
Le calcul des images demandait un peu de travail et réclamait pour X une IPP et pour X^2 une seconde. Non réussie à part $\varphi(1)$.
12. **2 pt** On pose $N = A - (e - 1)I_3$. Vérifier que N est nilpotente d'ordre 3.
Une belle réponse (bien joué Paul) qui a admis le résultat précédent.
13. **3 pt** En déduire les puissances de A .
Non traitée.
14. **3 pt** Préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(X - 3)$.
Non traitée.

FIN