Epreuve de mathématiques 10
2025-2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Intégration

L'objectif du problème est de déterminer un équivalent de $n!$. La première partie établie un équivalent à une constante près sans déterminer la constante. La seconde partie consiste à calculer explicitement cette constante.

Partie 1 : un équivalent

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n} n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$v_n = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
2. En déduire un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge. On note S sa somme totale.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On notera C sa limite. Exprimer C en fonction de S.
5. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que
$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha \sqrt{n} n^n \mathrm{e}^{-n}.$$

Partie 2 : calcul de α

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

6. Calculer I_0 et I_1.
7. Calculer I_2.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
9. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive.
10. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
11. Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} \leqslant I_n.$$
13. En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On notera ℓ sa limite.
14. Soit $\varepsilon \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\frac{\pi}{2}.$$

(c) En déduire que

$$0 \leqslant \ell \leqslant \varepsilon\,.$$

(d) Conclure sur la valeur de ℓ.

15. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

16. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1.$$

17. (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p\,(p!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{4^p\,(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

(b) A l'aide de la question 5., déterminer un équivalent simple en fonction de α de I_{2p} puis de I_{2p+1} quand p tend vers $+\infty$.

(c) En déduire la limite de $\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$ en fonction de α.

18. Conclure sur la valeur de α.

Problème 2 - Représentation matricielle

On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7a-5c & 3b-3d \\ -5a+7c & -3b+3d \end{pmatrix} \end{array}.$$

On admet que f est linéaire.

1. Rappeler la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On la notera $\mathscr{C}$.
2. Déterminer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
3. Déterminer le noyau de A. En déduire le noyau de f.
4. Préciser le rang de A puis une base de l'image de A. En déduire une base de l'image de f.

On pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

5. Préciser $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$.
6. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Pour tout $i \in [\![1;4]\!]$, calculer $f(e_i)$. En déduire $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
8. Montrer que (e_4) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$.
9. Sans calcul, préciser le lien entre A, D, P et P^{-1}.
10. Vérifier que $P^{-1} = P^T$.
11. Retrouver alors la valeur de D.
12. Justifier que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note alors q la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
13. Soit E un espace vectoriel. Soient p un projecteur de E et g un endomorphisme de E.
    (a) Montrer que $g \circ p = g \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(p) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.
    (b) Montrer que $p \circ g = g \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(p)$.
14. En déduire que $q \circ f = f \circ q$.
15. On pose $F = \mathrm{Im}(f)$. On note f_0 la restriction de f sur F autrement dit l'application définie par
    $$\forall x \in F = \mathrm{Im}(f), \qquad f_0(x) = f(x).$$
    (a) Justifier que f_0 est un endomorphisme de F.
    (b) Préciser D_0 la matrice de f_0 dans la base $\mathscr{B}_0$.

Problème 3 - Intégration et représentation matricielle

On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par
$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Une équation différentielle vérifiée par f

1. Justifier que f est définie sur $]0;+\infty[$ et déterminer son signe.
2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
3. Justifier soigneusement que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) + f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x}$.
5. *(Question indépendante)* Résoudre l'équation différentielle
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2+2x+5}$$

Partie 2 : Comportement en 0^+.

On définit pour tout $x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t+x}\,\mathrm{d}t.$

6. Justifier qu'il existe $M > 0$ (à déterminer) telle que
$$\forall t \in [0;1], \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant Mt.$$
7. En déduire que g est une fonction bornée sur $]0;+\infty[$.
8. Montrer alors que pour tout $x > 0$,
$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant M + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$
9. En déduire un équivalent simple de f en 0^+.

Partie 3 : Un endomorphisme

Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose $\varphi(f) : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

10. Montrer proprement que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Pour tout fonction polynomiale f, on admet que $\varphi(f)$ est aussi une fonction polynomiale. On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et pour tout polynôme P, on note $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée. On définit alors $\varphi(P)$ comme le polynôme associé à la fonction polynomiale $\varphi(\tilde{P})$. On admet que φ définit un endomorphisme sur E.

11. Déterminer A la matrice de φ dans la base $\mathscr{C}_{can} = (1, X, X^2)$.
12. On pose $N = A - (\mathrm{e}-1)I_3$. Vérifier que N est nilpotente d'ordre 3.
13. En déduire les puissances de A.
14. Préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(X-3)$.

FIN