

Correction du Devoir Maison 7

Continuité, dérivabilité et suites

Du mardi 24 février

Problème I - Continuité - Dérivabilité

Partie 1 : Le taux de τ détonne

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et deux fois dérivable sur $]a; b[$. On suppose que pour tout $x \in]a; b[$, $g''(x) \geq 0$ et on note

$$\forall x \in]a; b[, \quad \tau(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

1. Par hypothèse, g est deux fois dérivable donc $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b[$. De plus, $x \mapsto x - a$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b[$ en tant que fonction polynomiale et ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc par quotient,

$$\tau \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]a; b[.$$

De plus, on a directement,

$$\forall x \in]a; b[, \quad \tau'(x) = \frac{g'(x)(x - a) - (g(x) - g(a))}{(x - a)^2}.$$

2. Soit $x \in]a; b[$. La fonction g est continue sur $[a; b]$ donc sur $[a; x]$. De plus g est deux fois dérivable sur $]a; b[$ donc dérivable sur $]a; x[$. Donc par l'identité des accroissements finis,

$$\exists c_x \in]a; x[, \quad g(x) - g(a) = g'(c_x)(x - a).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} \tau'(x) &= \frac{g'(x)(x - a) - (g(x) - g(a))}{(x - a)^2} = \tau'(x) = \frac{g'(x)(x - a) - g'(c_x)(x - a)}{(x - a)^2} \\ &= \frac{g'(x) - g'(c_x)}{x - a} \quad \text{car } x \neq a. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in]a; b[, \exists c_x \in]a; b[, \quad \tau'(x) = \frac{g'(x) - g'(c_x)}{x - a}.$$

3. Par hypothèse, g'' est positive sur $]a; b[$. Donc g' est croissante sur $]a; b[$. Soit $x \in]a; b[$. Alors avec les notations de la question précédente, $a < c_x < x$. Donc par croissance de g' ,

$$g'(c_x) \leq g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) - g'(c_x) \geq 0.$$

Or $x - a > 0$, donc

$$\tau'(x) = \frac{g'(x) - g'(c_x)}{x - a} \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour $x \in]a; b[$ quelconque, on en déduit que

$$\forall x \in]a; b[, \quad \tau'(x) \geq 0.$$

Conclusion,

$$\text{la fonction } \tau \text{ est croissante sur }]a; b[.$$

Partie 2 : A appliquer deux fois par jour

Soit

$$f : \begin{array}{l}]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\arcsin(x^2)}{x} \end{array}$$

4. Posons

$$g : \begin{array}{l} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arcsin(x^2). \end{array}$$

La fonction arcsinus est continue sur $[-1; 1]$ et deux fois dérivable sur $] -1; 1[$. La fonction $c : x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $[0; 1]$ et $c([0; 1]) = [0; 1]$ et $c(]0; 1[) =]0; 1[$. Donc par composée, g est continue sur $[0; 1]$ et deux fois dérivable sur $]0; 1[$. De plus, pour tout $x \in]0; 1[$,

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$g''(x) = \frac{2\sqrt{1-x^4} - \frac{2x(-4x^3)}{2\sqrt{1-x^4}}}{1-x^4} = \frac{2(1-x^4) + 4x^4}{(1-x^4)^{3/2}} = \frac{2+2x^4}{(1-x^4)^{3/2}}.$$

On observe donc

$$\forall x \in]0; 1[, \quad g''(x) \geq 0.$$

Donc par la partie précédente, la fonction $\tau : x \mapsto \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ est croissante sur $]0; 1[$. Or

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \tau(x) = \frac{\arcsin(x^2) - \arcsin(0)}{x} = \frac{\arcsin(x^2)}{x} = f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur }]0; 1[.}$$

5. La fonction f est dérivable sur $]0; 1[$ comme composée et quotient de fonctions qui le sont et

$$\forall x \in]0; 1[, \quad f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}x - \arcsin(x^2)}{x^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin(x^2)}{x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0; 1[, \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin(x^2)}{x^2}.$$

6. Par ce qui précède, la fonction f est croissante sur $]0; 1[$ donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; 1[, \quad f'(x) \geq 0 &\Rightarrow \forall x \in]0; 1[, \quad \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} \geq 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in]0; 1[, \quad \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} \geq \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} \\ &\Rightarrow \forall x \in]0; 1[, \quad \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} \geq \arcsin(x^2) \quad \text{car } x^2 > 0. \end{aligned}$$

Posons $t = x^2$, alors quand x décrit $]0; 1[$, t décrit $]0; 1[$ et on obtient donc que

$$\boxed{\forall t \in]0; 1[, \quad \arcsin(t) \leq \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.}$$

7. Soit $x \in]0; 1[$. On sait que

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin(x^2)}{x^2}.$$

Or $\arcsin(x^2) > 0$ et $x^2 > 0$ donc $\frac{\arcsin(x^2)}{x^2} > 0$. Conclusion,

$$\forall x \in]0; 1[, \quad f'(x) \leq \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}.$$

8. Soit $x \in]0; \frac{1}{\sqrt{2}}[$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 \leq x^4 \leq \frac{1}{4} &\Rightarrow 1 \geq 1 - x^4 \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow 1 \geq \sqrt{1 - x^4} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\ &\Rightarrow 2 \leq \frac{2}{\sqrt{1 - x^4}} \leq \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1 - x^4}} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Donc par la question précédente,

$$\forall x \in]0; \frac{1}{\sqrt{2}}[, \quad f'(x) \leq \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Attention, ce résultat seul ne suffit ! De plus par la question 4. f est croissante donc f' est positive sur $]0; 1[$ donc sur $]0; \frac{1}{\sqrt{2}}[$. D'où

$$\forall x \in]0; \frac{1}{\sqrt{2}}[, \quad |f'(x)| = f'(x) \leq \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Soit $(x, y) \in]0; \frac{1}{\sqrt{2}}]^2$, $x \neq y$. Alors f est continue sur $[x; y]$ (ou $[y; x]$) et dérivable sur $]x; y[$ (ou $]y; x[$) donc par le théorème des accroissements finis,

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{t \in]x; y[} |f'(t)| |x - y| \leq \frac{4}{\sqrt{3}} |x - y|$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

$$\text{la fonction } f \text{ est } \frac{4}{\sqrt{3}}\text{-lipschitzienne sur }]0; \frac{1}{\sqrt{2}}[.$$

Partie 3 : Recollons les morceaux

On considère

$$\varphi : \begin{aligned} [-1; 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{\arcsin(x^2)}{x} & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in [-1; 0[. \end{cases} \end{aligned}$$

9. On sait que $\arcsin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$. Donc en posant $u = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a

$$\varphi(x) = \frac{\arcsin(x^2)}{x} \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{\sim} \frac{x^2}{x} = x.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0.$$

De plus $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x = 0$. Donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \varphi(x) = \varphi(0) = 0.$$

Par conséquent, φ est continue en 0. Or $x \mapsto \frac{\arcsin(x^2)}{x}$ est continue sur $]0; 1]$ (car la fonction $\arcsin$ l'est sur $[-1; 1]$) et $x \mapsto x$ est continue sur $[-1; 0[$. Donc φ est aussi continue sur $[-1; 0[$ et sur $]0; 1]$. Conclusion,

la fonction φ est continue $[-1; 1]$.

10. La fonction φ est continue sur $]-1; 1[$. De plus $x \mapsto \frac{\arcsin(x^2)}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$ et $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; 0[$. Donc φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; 0[\cup]0; 1[$. De plus, $\forall x \in]0; 1[$, $\varphi(x) = f(x)$ donc par la partie 2,

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin(x^2)}{x^2}.$$

Or

$$\frac{\arcsin(x^2)}{x^2} \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varphi'(x) = 2 - 1 = 1.$$

D'autre part, pour tout $x \in]-1; 0[$, on a $\varphi'(x) = 1$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \varphi'(x) = 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \varphi'(x)$. Donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \varphi'(x)$ existe et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \varphi'(x) = 1.$$

Donc f est continue sur $]-1; 1[$, $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; 0[\cup]0; 1[$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \varphi'(x) = 1$ donc par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$,

la fonction φ est $\mathcal{C}^1$ en 0 et $f'(0) = 1$.

Conclusion,

la fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; 1[$.

11. (a) On sait que $(1+u)^{-1/2} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{u}{2} + o(u)$. Posons $u = -x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Or la fonction $\arcsin$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1; 1[$. Donc par le théorème de primitivation des développements limités,

$$\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \arcsin(0) + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Conclusion,

$$\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

(b) Par la question précédente, $\arcsin(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Posons $u = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Alors,

$$\arcsin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6).$$

Donc

$$\arcsin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6).$$

Ainsi

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} \underset{x > 0}{=} x + \frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

Supposons $\varphi \mathcal{C}^5$ en 0. Alors par le théorème de Taylor-Young, il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \quad a_1 = 1, \quad a_5 = \frac{1}{6}.$$

Cependant, on observe également que

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x \underset{x > 0}{=} x + o(x^5).$$

Donc toujours par unicité du développement limité, on obtient que

$$a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \quad a_1 = 1, \quad a_5 = 0.$$

Donc $\frac{1}{6} = a_5 = 0$, contradiction. Conclusion,

la fonction φ n'est pas $\mathcal{C}^5$ en 0.

Par contre nous n'avons pas déterminé dans ce problème si φ était $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^3$ ou $\mathcal{C}^4$...

Problème II - Suites numériques

Partie 1 : Etude de f

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x+1 > 0$, donc la fonction f est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions polynomiale et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{4x(x+1) - 2x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et par continuité de f en 0, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 0$ et

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{2x^2}{x} = 2x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Conclusion,

x	0	$+\infty$
f	0	$+\infty$

2. On a $f(1) = \frac{2}{2} = 1$. De plus $f(0) = 0$ et f étant dérivable en 0 admet une tangente en 0 d'équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$. Or par la question précédente, $f'(0) = 0$. Conclusion,

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f \text{ admet une tangente en 0 d'équation } y = 0.$$

3. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+1} = 2x \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Posons $u = \frac{1}{x}$. On a $u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Or $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$. Donc

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x - 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x - 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Par la question précédente, on en déduit que le graphe de f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation

$$y = 2x - 2.$$

De plus,

$$f(x) - (2x - 2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc au voisinage de $+\infty$,

$$\text{le graphe de } f \text{ est au-dessus de son asymptote.}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) \geq x &\Leftrightarrow \frac{2x^2}{x+1} \geq x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{OU} \quad \begin{cases} \frac{2x}{x+1} \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{OU} \quad \begin{cases} 2x \geq x+1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{car } x+1 > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{OU} \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

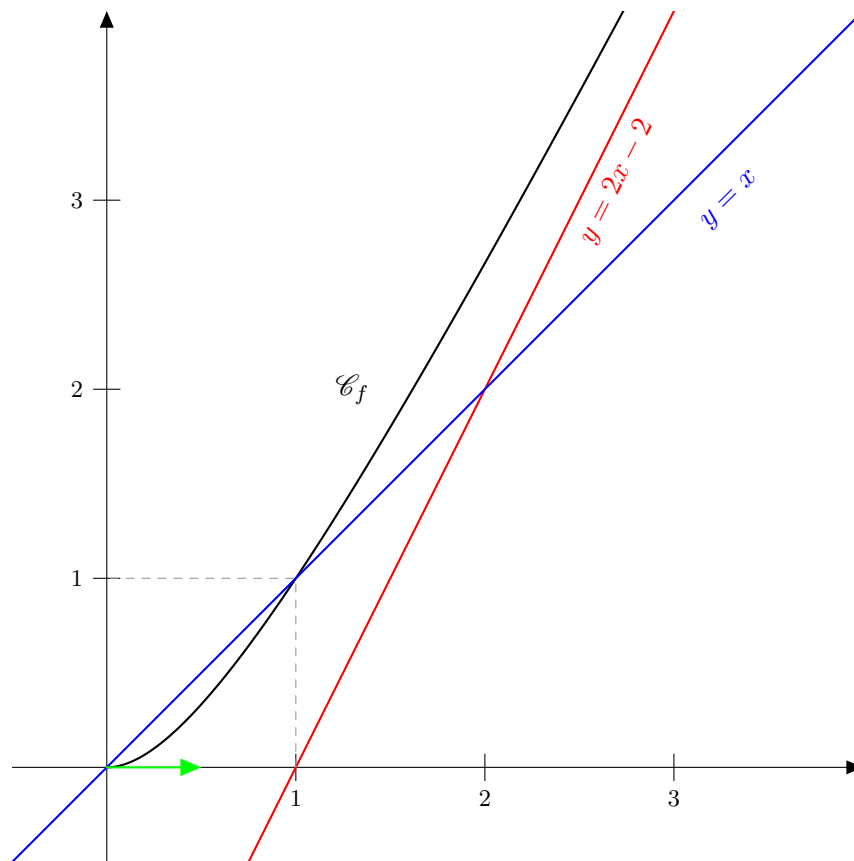
Conclusion,

$$f(x) \geq x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{OU} \quad x \geq 1.$$

On en déduit que

$$\text{le graphe de } f \text{ est au-dessus de la droite } y = x \text{ sur } [1; +\infty[\text{ et en dessous sur } [0; 1].$$

6. On obtient le graphe suivant :



Partie 2 : Une suite récurrente

On fixe $u_0 \in]0; 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+u_n}$.

7. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in]0; 1[$ ».

Initialisation. Si $n = 0$ alors par hypothèse, u_0 existe et $u_0 \in]0; 1[$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie : u_n existe et $u_n \in]0; 1[$. Comme u_n existe et $u_n > 0$ alors $u_n + 1 > 0$ et donc $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+u_n}$ existe. De plus, on observe que $u_{n+1} = f(u_n)$. Or par la question 1. fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$. Donc par le théorème de la bijection, on a $f([0; 1]) =]f(0); f(1)[=]0; 1[$. Comme $u_n \in]0; 1[$, on en déduit que

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f(]0; 1[) =]0; 1[.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ existe et } u_n \in]0; 1[.}$$

8. On a vu précédemment que pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) < x$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1[$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, en prenant $x = u_n$, on obtient

$$f(u_n) < u_n \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} < u_n.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

9. Par la question précédente, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus par la question 7. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0; 1[.$$

Donc par passage à la limite,

$$\ell \in [0; 1].$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme f est continue sur $[0; 1]$, f est continue en ℓ . Donc par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Or $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ (en tant que suite extraite). Conclusion, par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$,

$$\ell = f(\ell).$$

Or comme dans la question 5. pour $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ OU } \frac{2x}{x+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ OU } x = 1.$$

Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Or la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n < u_0.$$

Donc par passage à la limite,

$$\ell \leq u_0.$$

Or $u_0 < 1$. Donc $\ell < 1$ et donc $\ell \neq 1$. Conclusion,

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

10. Par la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Or par définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 0| \leq \varepsilon.$$

Donc en prenant $\varepsilon = \frac{1}{5}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq \frac{1}{5}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Conclusion,

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq \frac{1}{5}.$

11. On pose $k = \frac{22}{25}$. Soient $(x, y) \in [0; \frac{1}{5}]^2$, $x \neq y$. La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ donc en particulier :

- f est continue sur $[x; y]$ (ou $[y; x]$),
- f est dérivable sur $]x; y[$ (ou $]y; x[$).

Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in]x; y[, \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c).$$

Par la question 1. $f'(c) = \frac{2c(c+2)}{(c+1)^2}$. Puisque $(x, y) \in [0; \frac{1}{5}]^2$, alors $c \in [0; \frac{1}{5}]$. Donc $2c(c+2) \leq \frac{2}{5} \times \frac{11}{5} = \frac{22}{25}$. D'autre part, $c+1 \geq 1$ donc $\frac{1}{(c+1)^2} \geq 1$. Ainsi par produit (les nombres sont positifs),

$$0 \leq f'(c) \leq \frac{22}{25} = k.$$

D'où,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y| \leq k |x - y|.$$

On remarque que l'inégalité reste vraie si $x = y$. Conclusion,

$$\forall (x, y) \in \left[0; \frac{1}{5}\right]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \frac{1}{5}\text{-lipschitzienne sur } \left[0; \frac{1}{5}\right].}$$

12. Pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \in [0; \frac{1}{5}]$. Donc par la question précédente en prenant $x = u_n$ et $y = 0$, on obtient

$$|f(u_n) - f(0)| \leq k |u_n - 0| \quad \Leftrightarrow \quad |u_{n+1} - 0| \leq k |u_n| \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} \leq k u_n.$$

Or k ne dépend pas de n . Donc par récurrence (que l'on prend soin d'initialiser à n_0),

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq k^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Or pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq \frac{1}{5}$, notamment $u_{n_0} \leq \frac{1}{5}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq \frac{k^{n-n_0}}{5}.$$

13. Par la question précédente,

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq \underbrace{\frac{1}{5k^{n_0}}}_{\text{constante indépendante de } n} k^n.$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k^{n-n_0}}{5} = 0$ car $k = \frac{22}{25} \in]-1; 1[$. Conclusion, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

Partie 3 : Une suite implicite

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1. :

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
- $f(0) = 0 < n$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > n$

Conclusion, par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! x_n \in \mathbb{R}_+, \quad f(x_n) = n.}$$

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n < n + 1$. Donc par définition,

$$f(x_n) < f(x_{n+1}).$$

La fonction f étant strictement croissante,

$$x_n < x_{n+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$,

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

16. Par la question précédente et le théorème de convergence monotone, on en déduit que

- OU la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel fixé ℓ ,
- OU la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Supposons le premier cas, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et notons ℓ sa limite. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$, alors par passage à la limite, $\ell \geq 0$ i.e. $\ell \in \mathbb{R}_+$. Par continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ et donc en ℓ , on a par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell) \in \mathbb{R}.$$

Or par définition, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = n$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Donc $+\infty = f(\ell) \in \mathbb{R}$. Contradiction. Le premier cas étant impossible, le second est vérifié. Conclusion,

la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

17. Par la question 3. on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 2x - 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (important à préciser) donc

$$\begin{aligned} f(x_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2x_n - 2 + \frac{2}{x_n} + o\left(\frac{1}{x_n}\right) &\Leftrightarrow n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2x_n - 2 + o(1) && \text{car } \frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Leftrightarrow 2x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + 2 + o(1) \\ &\Leftrightarrow x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n}{2} + 1 + o(1). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n}{2} + 1 + o(1).$$

18. Par la question précédente, $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$. Donc par définition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2x_n} = 1$ ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{x_n} = 2$.

Conclusion, la suite $\left(\frac{n}{x_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{x_n} = 2.$$