Devoir Maison 5
Equations différentielle, matrices, analyse asymptotique

A faire pour le mardi 06 janvier

Problème I - Equations différentielles

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble des solutions de l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(E) \qquad x^2y''(x) + 3|x|y'(x) + 3y(x) = 1 + 6x^3.$$

Partie 1 : Le v de la victoire

On considère l'équation suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$(E-) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad x^2y''(x) + 3|x|y'(x) + 3y(x) = 1 + 6x^3.$$

On définit également l'équation d'inconnue v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

$$(F) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad v'(x) + \frac{3}{x}v(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^2}.$$

On note (F_0) l'équation homogène associée.

1. Déterminer $\mathscr{S}_{F_0}$ l'ensemble des solutions de (F_0).
   On écrira $\mathscr{S}_{F_0}$ sous forme ensembliste et d'espace engendré.
2. En déduire $\mathscr{S}_F$ l'ensemble des solutions de (F).
3. Soit y une fonction deux fois dérivable $\mathbb{R}_-^*$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $u(x) = \frac{y(x)}{x^3}$ puis $v = u'$.
   (a) Justifier que v est bien définie et que v est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.
   (b) Montrer que y est solution de $(E-)$ si et seulement si v est solution de (F).
   (c) En déduire $\mathscr{S}_{E-}$ l'ensemble des solutions de $(E-)$.
4. Soit $y \in \mathscr{S}_{E-}$.
   (a) Déterminer un équivalent le plus simple possible de y en $-\infty$.
   (b) Déterminer le comportement asymptotique du graphe de y en $-\infty$.

Partie 2 : Le z, nous le signons à la pointe de l'épée

On considère l'équation suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E+) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2y''(x) + 3|x|y'(x) + 3y(x) = 1 + 6x^3.$$

5. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$. Justifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis montrer que z est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera. On note (G) cette équation différentielle vérifiée par z.
6. Résoudre (G).
7. En déduire $\mathscr{S}_{E+}$ l'ensemble des solutions de $(E+)$.

Partie 3 : Voilà une solution branchée

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Soit $y \in \mathscr{S}$. On pose y_+ la restriction de y sur $\mathbb{R}_+^*$ et y_- la restriction de y sur $\mathbb{R}_-^*$.

8. A l'aide des parties précédentes, exprimer y_+ en fonction de x et de deux constantes A et B et y_- en fonction de x et de deux constantes C et D.
9. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y_-(x)$ et en déduire en justifiant la valeur de $y(0)$.
10. Pour tout $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, on admet que
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{A\cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + B\sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)}{x} \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad A = B = 0.$$
Préciser alors y_+.
11. Montrer que y_+ est dérivable à droite en 0 et préciser sa limite.
12. Calculer la limite du taux d'accroissement de y en 0^-. Que peut-on en déduire ?
13. Montrer alors que y est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.
14. Conclure en précisant $\mathscr{S}$.

Problème II - Matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I_3$.

Partie 1 : Gauss ouvre le bal

1. Calculer N, N^2 puis vérifier que $N^3 = 0_3$.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose
$$\mathscr{S}_\lambda = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; AX = \lambda X \right\}.$$
Déterminer selon la valeur de λ, l'ensemble $\mathscr{S}_\lambda$.

Partie 2 : Méthode 1, Newton le rejoint pour former un binôme

3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
4. Préciser A^5.

Partie 3 : Méthode 2, Mais Euclide apporte la division

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on admet l'existence de trois réels $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ et d'un polynôme Q_n tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = (x-1)^3\, Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Dériver deux fois l'égalité précédente.
6. En déduire en fonction de $n \geqslant 2$ les coefficients a_n, b_n et c_n.
On donnera les expressions factorisées.
7. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de A^n en fonction de n, A et A^2.
8. Retrouver la valeur de A^5.

Partie 4 : Soyons carrés pour éviter de se prendre les pieds dans les racines

On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = T - I_3$. On s'intéresse à déterminer l'ensemble des racines carrées de T :

$$\mathscr{R}_T = \left\{ S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; S^2 = T \right\}.$$

Pour ce faire, on pose également $\mathscr{C}_T$ l'ensemble des matrices commutant avec T :

$$\mathscr{C}_T = \{ S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid TS = ST \}.$$

On admet que $\mathscr{C}_T = \left\{ aI_3 + bM + cM^2 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

9. Montrer que $\mathscr{R}_T \subset \mathscr{C}_T$.
10. En déduire que $\mathscr{R}_T$ est un ensemble ne contenant que deux matrices que l'on déterminera.

Partie 5 : Pour gagner c'est comme au baseball, il faut savoir changer de base

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
12. Calculer $P^{-1}AP$.

On considère

$$\mathscr{R}_A = \left\{ B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; B^2 = A \right\}.$$

13. Montrer que $B \in \mathscr{R}_A$ si et seulement si $S = P^{-1}BP \in \mathscr{R}_T$.
14. En déduire $\mathscr{R}_A$.

Problème III - Analyse asymptotique

On pose pour $n = 1$,

$$\tan^{[1]} = \tan$$

Puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\tan^{[n+1]} = \tan \circ \tan^{[n]} = \underbrace{\tan \circ \tan \circ \cdots \circ \tan}_{n+1 \text{ fois}}$$

où l'on rappelle que $\circ$ désigne la composition.

Partie 1 : Je compose donc je suis

1. On pose $I_1 = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et $I_2 = \left[-\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\,;\,\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.
   (a) Préciser en justifiant $\tan(I_1)$ et $\arctan([-1\,;\,1])$.
   (b) Donner l'image réciproque $\tan^{-1}([-1\,;\,1])$.
   (c) Calculer $\tan^{[2]}(I_2)$.

On admet dans la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $I_n = [-\eta_n\,;\,\eta_n]$ un voisinage de 0, centré en 0, avec $\eta_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\tan^{[n]}$ est bien définie et même $\mathscr{C}^5$ sur I_n. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} \subset I_n.$$

2. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\tan^{[n]}$ est impaire sur I_n.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\tan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right).$$

Partie 2 : Il n'y a que le premier pas qui coûte

3. Rappeler le développement limité à l'ordre 5 de la fonction sinus en 0.
4. En déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tangente et vérifier que $a_1 = 1$, $b_1 = \frac{1}{3}$ et $c_1 = \frac{2}{15}$.

Partie 3 : La meilleure façon de marcher, c'est d'itérer

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right)$.
   (a) Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto (u_n(x))^3$.
   (b) Même question pour $x \mapsto (u_n(x))^5$.
   (c) En déduire une expression du développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan^{[n+1]}$ en fonction des coefficients a_n, b_n et c_n.
   (d) En déduire alors en justifiant une formule de récurrence de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
6. (a) Quelle est la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? En déduire a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Quelle est la nature de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? En déduire b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)$.
   (d) En déduire c_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
7. Préciser alors le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan^{[5]}$.