Correction du Devoir Maison 4
Equations complexes, calcul d'intégrales, équations différentielles d'ordre 1

Du mardi 02 décembre

Problème I - Equations complexes

Soient A, B, C, I, O les points d'affixe respectivement $z_A = 1-i$, $z_B = \sqrt{2}i$, $z_C = 1+\left(\sqrt{2}-1\right)i$, $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$ et $Z_O = 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}\setminus\left\{\sqrt{2}i\right\}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\left\{\sqrt{2}i\right\}, \qquad f(z) = \frac{z-1+i}{z-\sqrt{2}i}.$$

1. On a les égalités entre les complexes suivantes :

$$z_A = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Et,

$$z_B = \sqrt{2}i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{z_A = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_B = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}.}$$

2. Soit Δ le discriminant de $z^2-(1+i)z+2+2i$. On a

$$\Delta = (1+i)^2 - 4(2+2i) = 1+2i-1-8-8i = -8-6i.$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\delta = x+iy$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \quad &\Leftrightarrow \quad x^2-y^2+2ixy = -8-6i \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \qquad \text{par unicité de la forme algébrique} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \\ x^2+y^2 = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ 2xy = -6 \\ y^2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{L_1+L_3}{2} \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3-L_1}{2} \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \text{car } xy \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \delta = 1-3i \quad \text{OU} \quad \delta = -1+3i.
\end{aligned}$$

Fixons $\delta = 1-3i$, alors les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1-i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1-i; 2i\}.}$$

3. Soit (E) : $z^{10}-(1+i)\,z^5+2+2i$. Soit $z\in\mathbb{C}$. Posons $\omega=z^5$. On a

$$(E) \quad\Leftrightarrow\quad \omega^2-(1+i)\,\omega+2i=0.$$

Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
(E) \quad&\Leftrightarrow\quad \omega=1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \quad\text{OU}\quad \omega=2i=2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow\quad z^5=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \quad\text{OU}\quad z^5=2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow\quad \exists k\in[\![0;4]\!],\quad z=\left(2^{1/2}\right)^{1/5}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{20}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}} \quad\text{OU}\quad z=2^{1/5}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{10}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}\\
&\Leftrightarrow\quad \exists k\in[\![0;4]\!],\quad z=2^{1/10}\,\mathrm{e}^{i\frac{(8k-1)\pi}{20}} \quad\text{OU}\quad z=2^{1/5}\,\mathrm{e}^{i\frac{(4k+1)\pi}{10}}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{2^{1/10}\,\mathrm{e}^{i\frac{(8k-1)\pi}{20}};2^{1/5}\,\mathrm{e}^{i\frac{(4k+1)\pi}{10}}\;\middle|\;k\in[\![0;4]\!]\right\}.}$$

4. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z_A=\mathrm{e}^{i\theta}(z_B-z_C)+z_C \quad&\Leftrightarrow\quad 1-i=\mathrm{e}^{i\theta}\left(\sqrt{2}i-1-\left(\sqrt{2}-1\right)i\right)+1+\left(\sqrt{2}-1\right)i\\
&\Leftrightarrow\quad 1-i-1-i\sqrt{2}+i=\mathrm{e}^{i\theta}(-1+i)\\
&\Leftrightarrow\quad -i\sqrt{2}=\mathrm{e}^{i\theta}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad -i=\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\\
&\Leftrightarrow\quad \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\\
&\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{2}\equiv\theta+\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow\quad \theta\equiv-\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\\
&\Leftrightarrow\quad \theta\equiv-\frac{5\pi}{4}\equiv\frac{3\pi}{4}\ [2\pi].
\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien un angle solution et donc :

$$\boxed{A\text{ est l'image de }B\text{ par la rotation de centre }C\text{ et d'angle }\frac{3\pi}{4}.}$$

5. (a) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\sqrt{2}i\right\}$. On a les équivalences entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned}
z\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \quad&\Leftrightarrow\quad f(z)\in\mathbb{U}\\
&\Leftrightarrow\quad f(z)\overline{f(z)}=1\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{z-1+i}{z-\sqrt{2}i}\,\frac{\overline{z}-1-i}{\overline{z}+\sqrt{2}i}=1\\
&\Leftrightarrow\quad |z|^2-z-iz-\overline{z}+i\overline{z}+1+i-i+1=|z|^2+\sqrt{2}iz-\sqrt{2}i\overline{z}+2 \quad \text{car } z\neq\sqrt{2}i\\
&\Leftrightarrow\quad -(z+\overline{z})-i(z-\overline{z})=\sqrt{2}i(z-\overline{z})\\
&\Leftrightarrow\quad -2\mathrm{Re}(z)+2\mathrm{Im}(z)=-2\sqrt{2}\mathrm{Im}(z)\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{2}+1\right)\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z).
\end{aligned}$$

Posons $x=\mathrm{Re}(z)$ et $y=\mathrm{Im}(z)$. Dès lors,

$$z\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \quad\Leftrightarrow\quad x=\left(\sqrt{2}+1\right)y \quad\Leftrightarrow\quad z=\left(\sqrt{2}+1\right)y+iy=\left(\sqrt{2}+1+i\right)y.$$

On note que si $z=\sqrt{2}i$, on a $x=0$ et $y=\sqrt{2}$ et $0\neq\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}$. Donc $\sqrt{2}i$ ne fait pas partie de l'ensemble solution. Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{U})=\left\{\left(\sqrt{2}+1+i\right)y\in\mathbb{C}\;\middle|\;y\in\mathbb{R}\right\}.}$$

(b) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points dont l'affixe est dans $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$. Si $y=0$, on a

$$0=\left(\sqrt{2}+1+i\right)y\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U})\qquad\Rightarrow\qquad O\in\mathcal{D}.$$

De plus,

$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{1-i+\sqrt{2}i}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

Si on prend $y=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, on a

$$\left(\sqrt{2}+1+i\right)y=\left(\sqrt{2}+1+i\right)\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{2-1+i\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}=\frac{1+i\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}=z_I.$$

Donc par la question précédente, $z_I\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$ et donc $I\in\mathcal{D}$.
Enfin, si $y=\sqrt{2}-1$, on a

$$\left(\sqrt{2}+1+i\right)y=\left(\sqrt{2}+1+i\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=2-1+i\left(\sqrt{2}-1\right)=1+i\left(\sqrt{2}-1\right)=z_C.$$

Donc $z_C\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$ et donc $C\in\mathcal{D}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les points } O,\ I \text{ et } C \text{ appartiennent à } \mathcal{D}.}$$

(c) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\sqrt{2}i\right\}$. On observe que

$$\begin{aligned}
z\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \quad&\Leftrightarrow\quad f(z)\in\mathbb{U}\\
&\Leftrightarrow\quad |f(z)|=1\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{|z-1+i|}{\left|z-\sqrt{2}i\right|}=1\\
&\Leftrightarrow\quad |z-1+i|=\left|z-\sqrt{2}i\right| \qquad\qquad \text{car } z\neq\sqrt{2}i \text{ car } M\neq C\\
&\Leftrightarrow\quad |z-z_A|=|z-z_B|.
\end{aligned}$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{z\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U})\qquad\Leftrightarrow\qquad |z-z_A|=|z-z_B|.}$$

(d) Par la question précédente, pour $M(z)$ un point du plan complexe différent de B, on a

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{D}\quad&\Leftrightarrow\quad z\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U})\\
&\Leftrightarrow\quad |z-z_A|=|z-z_B|\\
&\Leftrightarrow\quad AM=BM\\
&\Leftrightarrow\quad M \text{ est sur la médiatrice de } [AB].
\end{aligned}$$

Répétons que $z_B\notin f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$ et donc $B\notin\mathcal{D}$. Donc

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{D} \text{ est la médiatrice de } [AB].}$$

6. *Méthode 1, par les diagonales.* On a vu que $O \in \mathcal{D}$, $C \in \mathcal{D}$. Or $C \neq O$, donc $\mathcal{D} = (OC)$. Donc par la question précédente, (OC) est la médiatrice de $[AB]$. Donc les diagonales $[AB]$ et $[OC]$ sont perpendiculaires. De plus, $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$ donc z_I est le milieu de $[AB]$. Calculons $I'(z_{I'})$ le milieu de $[OC]$:
$$z_{I'} = \frac{z_C + z_O}{2} = \frac{1 + \left(\sqrt{2}-1\right) i}{2} = z_I \qquad \text{comme vu à la question 5.b}$$
Donc $I' = I$ et donc les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. Conclusion,
$$\boxed{ACBO \text{ est un losange.}}$$
Méthode 2, par les côtés. On a vu que $O \in \mathcal{D}$, $C \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[AB]$ donc $OA = OB$ et $AC = CB$. Montrons que $OA = AC$. On a
$$OA = |z_A - z_0| = |1-i| = \sqrt{2}$$
et
$$AC = |z_C - z_A| = \left|1 + \left(\sqrt{2}-1\right) i - 1 + i\right| = \left|\sqrt{2}i\right| = \sqrt{2}.$$
Donc on a bien $OA = AC$ et donc $OB = OA = AC = CB$ et $ACBO$ a ses quatre côtés égaux. Conclusion,
$$\boxed{ACBO \text{ est un losange.}}$$

7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les égalités entre complexes suivantes :
$$\begin{aligned}
-\sqrt{2}i\,\mathrm{e}^{i\theta} + 1 - i &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{i\theta} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} \\
&= \sqrt{2}\left(\mathrm{e}^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} + \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}{2}}\right) && \text{par factorisation par l'angle moitié} \\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)}\left(\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)} + \mathrm{e}^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}\right) \\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)}\,2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$
Conclusion, on a bien
$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad -\sqrt{2}i\,\mathrm{e}^{i\theta} + 1 - i = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)}.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{2}i\right\}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n) \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{U}_n \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad f(z) = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \frac{z-1+i}{z-\sqrt{2}i} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z - 1 + i = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\left(z-\sqrt{2}i\right) && \text{car } z - \sqrt{2}i \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z\left(1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -\sqrt{2}i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1 - i.
\end{aligned}$$
A l'aide de la question précédente, avec $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, on obtient que
$$z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad z\left(1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{3\pi}{8}\right)}.$$

De plus, si $k=0$, on obtient

$$z\left(1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)=0=2\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}} \qquad \text{ce qui est faux.}$$

Donc $k=0$ et $1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\neq 0$. Par suite, $z\in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n)$ si et seulement s'il existe $k\in[\![1;n-1]\!]$ tel que

$$\begin{aligned}
z &= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{3\pi}{8}\right)}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}}\\
&= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{3\pi}{8}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}-\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right)} \qquad \text{par factorisation par l'angle moitié}\\
&= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{n}}-\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}\\
&= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}}}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\\
&= \sqrt{2}i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{8}}\\
&= \sqrt{2}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n)=\left\{\sqrt{2}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}\;\middle|\; k\in[\![1;n-1]\!]\right\}.}$$

Problème II - Calcul d'intégrales

On fixe dans tout ce problème $I=]0;+\infty[$ et on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\forall x\in I,\qquad F_n(x)=\int_1^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Fiez-vous aux F_i, n'en faîtes pas fi

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $t\in I$, $1+t^2>1>0$ et $t>0$ donc la fonction $f:t\mapsto\frac{t^{n-1}}{1+t^2}$ est continue sur I (y compris si $n=0$ et donc $t^{n-1}=\frac{1}{t}$!). De plus $1\in I$. Donc

   $$\boxed{\text{par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction } F_n \text{ est bien définie sur } I}$$

   et est même une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I en tant qu'unique primitive de f s'annulant en 1.

2. Soit $x\in I$. On a

   $$F_1(x)=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   On reconnaît la dérivée de la fonction arctan :

   $$F_1(x)=[\arctan(t)]_{t=1}^{t=x}=\arctan(x)-\arctan(1).$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall x\in I,\qquad F_1(x)=\arctan(x)-\frac{\pi}{4}.}$$

3. Soit $x \in I$. On a
$$F_2(x) = \int_1^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
On reconnaît du $\frac{u'}{2u}$:
$$F_2(x) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left|1+t^2\right|\right)\right]_{t=1}^{t=x} = \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln(2)}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F_2(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln(2)}{2}.}$$
Vérification : $F'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$ *OK !*

4. Soit $x \in I$. On a
$$F_3(x) = \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
On extrait la partie entière :
$$\begin{aligned} F_3(x) &= \int_1^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x - 1 - [\arctan(t)]_{t=1}^{t=x} \\ &= x - 1 - \arctan(x) + \arctan(1). \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F_3(x) = x - \arctan(x) + \frac{\pi}{4} - 1.}$$
Vérification : $F_3'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$ *OK !*

5. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, pour tout $t \in I$, on a
$$\begin{aligned} \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{a\left(1+t^2\right) + (bt+c)\,t}{t\left(1+t^2\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{at^2 + a + bt^2 + ct}{t\left(1+t^2\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{(a+b)\,t^2 + ct + a}{t\left(1+t^2\right)}. \end{aligned}$$
On note alors qu'il **suffit** de prendre
$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b=-a=-1 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}.$$
Conclusion, pour $a=1$, $b=-1$ et $c=0$, on a
$$\boxed{\forall t \in I, \quad \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.}$$
Vérification : $\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t(1+t^2)}$ *OK !*

6. Soit $x \in I$. Pour $n = 0$, on a

$$F_0(x) = \int_1^x \frac{t^{-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Donc d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\ln(|t|) - \frac{1}{2}\ln\left(\left|1+t^2\right|\right)\right]_{t=1}^{t=x} \\ &= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - 0 + \frac{1}{2}\ln(2) \qquad \text{car } x > 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F_0(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln(2).}$$

Vérification : $F_0'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ *OK !*

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$. On a

$$\begin{aligned} F_n(x) + F_{n+2}(x) &= \int_1^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \frac{t^{n-1}+t^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_1^x t^{n-1}\frac{1+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Premier cas, si $n \neq 0$, alors,

$$F_n(x) + F_{n+2}(x) = \left[\frac{t^n}{n}\right]_{t=1}^{t=x} = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{n}.$$

Second cas, si $n = 0$, alors

$$F_0(x) + F_2(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_{t=1}^{t=x} = \ln(x).$$

On remarque que cela est cohérent avec les questions 3. et 6. car nous avions

$$F_0(x) + F_2(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln(2)}{2} = \ln(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n(x) + F_{n+2}(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{n} & \text{si } n \neq 0 \\ \ln(x) & \text{si } n = 0. \end{cases}}$$

En particulier, pour $n = 2$,

$$\forall x \in I, \qquad F_2(x) + F_4(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad F_4(x) = \frac{x^2}{2} - 1 - F_2(x).$$

Donc par la question 3.,

$$\boxed{\forall x \in I, \qquad F_4(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\ln\left(1+x^2\right) - \ln(2)}{2} = \frac{x^2 - \ln\left(1+x^2\right) + \ln(2) - 1}{2}.}$$

Partie 2 : Voici A, B, C. Jamais d'eux sans 3...

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_3(x) = x - \arctan(x) + \frac{\pi}{4} - 1.$$

8. On note que la fonction $t \mapsto t\arctan(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\left[1;\sqrt{3}\right]$ et donc $\boxed{A \text{ existe}}$. Posons

$$\forall t \in \left[1;\sqrt{3}\right], \qquad \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \arctan(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\left[1;\sqrt{3}\right]$ et

$$\forall t \in \left[1;\sqrt{3}\right], \qquad \begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\sqrt{3}} t\arctan(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\arctan(t)\right]_{t=1}^{t=\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{2}\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{2}F_3\left(\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Donc par la question 4.,

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{2}\times\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \arctan\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{4} - 1\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5\pi}{12} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A = \frac{5\pi}{12} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}.}$$

9. On note que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{e}^{2t} \geqslant 1 > 0$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{3t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc notamment sur $[0;1]$, donc $\boxed{B \text{ existe}}$. Posons pour tout $t \in [0;1]$, $s = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln(s)$. Si $t = 0$, $s = 1$. Si $t = 1$, $s = \mathrm{e}$. Enfin, la fonction ln est $\mathscr{C}^1$ sur $[1;\mathrm{e}]$ et $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{s}$. Ainsi,

$$B = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{3t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{s^3}{1+s^2}\frac{\mathrm{d}s}{s} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = F_3(\mathrm{e}).$$

Conclusion, par la question 4.,

$$\boxed{B = \mathrm{e} - \arctan(\mathrm{e}) + \frac{\pi}{4} - 1.}$$

10. Pour tout $t \in [0;1]$, $1 + t \geqslant 1 > 0$ donc $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{1+t}$ est continue sur $[0;1]$ donc

$$\boxed{C \text{ existe.}}$$

Posons $s=\sqrt{t}$. Si $t=0$, $s=0$ et si $t=3$, $s=\sqrt{3}$. De plus $t=s^2$. La fonction $s\mapsto s^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\sqrt{3}\right]$ et $\mathrm{d}t=2s\,\mathrm{d}s$. Donc par changement de variable,

$$\begin{aligned} C &= \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{s}{1+s^2}2s\,\mathrm{d}s \\ &= 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= 2\left(F_3\left(\sqrt{3}\right)-F(0)\right). \end{aligned}$$

Toujours par la question 4.

$$C = 2\left(\sqrt{3}-\arctan\left(\sqrt{3}\right)+\frac{\pi}{4}-1-0+0-\frac{\pi}{4}+1\right) = 2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{C = 2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}.}$$

Problème III - Equations différentielles d'ordre 1

Prérequis : On admet que la fonction exponentielle admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0, autrement dit on admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{n\to 0}\varepsilon_n(0)=0$ et telle que

$$(\bigstar) \qquad \forall x\in\mathbb{R},\qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+x^n\,\varepsilon_n(x),$$

On considère l'équation (E) d'inconnue une fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que

$$(E) \qquad \forall x\in\mathbb{R},\quad |x|\,y'(x)-(x+1)y(x)=x^2.$$

On définit également les équations suivantes :

$$\begin{aligned} &(E^+) && \forall x\in\mathbb{R}_+^*, && |x|\,y'(x)-(x+1)y(x)=x^2,\\ &(E_0^+) && \forall x\in\mathbb{R}_+^*, && |x|\,y'(x)-(x+1)y(x)=0,\\ &(E^-) && \forall x\in\mathbb{R}_-^*, && |x|\,y'(x)-(x+1)y(x)=x^2,\\ &(E_0^-) && \forall x\in\mathbb{R}_-^*, && |x|\,y'(x)-(x+1)y(x)=0. \end{aligned}$$

et on note respectivement $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}^+$, $\mathscr{S}_0^+$, $\mathscr{S}^-$ et $\mathscr{S}_0^-$ les solutions de (E), (E^+), (E_0^+), (E^-) et (E_0^-).

Partie 1 : Qui positive, peut le +. Et qui peut le +...

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $|x|=x>0$. Donc

$$(E_0^+) \qquad\Leftrightarrow\qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad y'(x)-\frac{x+1}{x}y(x)=0.$$

La fonction $x\mapsto\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$ en particulier la fonction $x\mapsto x+\ln(x)$ est une primitive de $x\mapsto\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc y_0 est une solution de (E_0^+), si et seulement s'il existe $C\in\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad y_0(x)=C\,\mathrm{e}^{x+\ln(x)}=Cx\,\mathrm{e}^x.$$

En d'autres termes,

$$\boxed{\mathscr{S}_0^+=\left\{y_0:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & Cx\,\mathrm{e}^x\end{array}\,\middle|\, C\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x\,\mathrm{e}^x\end{array}\right).}$$

2. Soient $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $y_0 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x\,\mathrm{e}^x \end{array}$ et $z : x \mapsto \frac{y(x)}{x\,\mathrm{e}^x}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus pour tout $x > 0$,

$$y'(x) = z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{lll} y \text{ solution de } (E^+) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) - \dfrac{x+1}{x}y(x) = x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x)y_0(x) + \underbrace{z(x)y_0'(x) - \dfrac{x+1}{x}z(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0^+} = x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(x) = \dfrac{x}{y_0(x)} = \dfrac{x}{x\,\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{car } \forall x > 0,\ y_0(x) \neq 0. \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{lll} y \text{ solution de } (E^+) & \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = C - \mathrm{e}^{-x} \\ & \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \left(C - \mathrm{e}^{-x}\right) x\,\mathrm{e}^x = Cx\,\mathrm{e}^x - x. \end{array}$$

On a donc bien

$$\boxed{\mathscr{S}^+ = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto -x + Cx\,\mathrm{e}^x \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie 2 : ...peut le − (enfin plus ou moins).

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, puis pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = t^2 \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^t \\ v'(t) = 2t \end{cases}$. Alors par intégration par parties,

$$I(x) = \left[t^2\,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^x - \int_0^x 2t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = x^2\,\mathrm{e}^x - \int_0^x 2t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

On repose alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^t \\ v(t) = 2t \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u'(t) = \mathrm{e}^t \\ v'(t) = 2 \end{cases}$. Par une seconde intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} I(x) &= x^2\,\mathrm{e}^x - \left[2t\,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^x + \int_0^x 2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= x^2\,\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + \left[2\,\mathrm{e}^t\right]_{t=0}^{t=x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^x t^2\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^x - 2.}$$

4. On a

$$(E_0^-) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y'(x) + \frac{x+1}{x}y(x) = 0.$$

La fonction $x \mapsto -\frac{x+1}{x} = -1 - \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_-^*$, notamment la fonction $x \mapsto -x - \ln(|x|)$. Donc y est une solution de (E_0^-) si et seulement si

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = C\,\mathrm{e}^{-x-\ln(|x|)} = \frac{C}{|x|}\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{\tilde{C}}{x}\,\mathrm{e}^{-x},$$

avec $\tilde{C} = -C$. En d'autres termes,

$$\boxed{\mathscr{S}_0^- = \left\{ y_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{x}\,\mathrm{e}^{-x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{array} \right).}$$

5. Soient $y : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$, $y_0 : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_-^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{array}$ et $z : x \mapsto y(x)x\,\mathrm{e}^{x}$. La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si la fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et de plus pour tout $x < 0$,

$$y'(x) = z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E^-) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad -xy'(x) - \frac{x+1}{x}y(x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y'(x) + \frac{x+1}{x}y(x) = -x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad z'(x)y_0(x) + \underbrace{z(x)y_0'(x) + \frac{x+1}{x}z(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0^-} = -x \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad z'(x) = \frac{-x}{y_0(x)} = -x^2\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{car } \forall x < 0,\ y_0(x) \neq 0.
\end{aligned}$$

Or d'après la question (3.), on sait que $x \mapsto -\left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{x}$ est une primitive de $x \mapsto -x^2\,\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E^-) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad z(x) = -\left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{x} + C \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y(x) = \frac{-\left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{x} + C}{x\,\mathrm{e}^{x}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y(x) = -x + 2 + \frac{C\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$\boxed{\mathscr{S}^- = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_-^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto -x + 2 + \frac{C\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie 3 : Lorsque les connexions se font, la solution apparaît

Soit $y \in \mathscr{S}$.

6. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|\,y'(x) - (x+1)y(x) = x^2$, on a notamment pour $x = 0$, $-y(0) = 0$ et donc $\boxed{y(0) = 0}$.

7. Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors y est une solution de (E^+) sur $\mathbb{R}_+^*$ et de (E^-) sur $\mathbb{R}_-^*$ i.e. $y \in \mathscr{S}^+ \cap \mathscr{S}^-$. D'après la Partie A, il existe $A \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 0$,

$$y(x) = -x + Ax\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

D'autre part, d'après la Partie C, il existe $B \in \mathbb{R}$ (attention de bien prendre un nouveau nom pour cette nouvelle constante) telle que pour tout $x < 0$,

$$y(x) = -x + 2 + \frac{B\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x}.$$

En couplant ces expressions avec la question précédente, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} -x + Ax\,\mathrm{e}^{x} & \text{si } x > 0 \\ y(0) = 0 & \text{si } x = 0 \\ -x + 2 + \frac{B\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

8. Soit $C \in \mathbb{R}$. Premier cas : supposons que $C > 2$. Alors, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} C\,\mathrm{e}^{-x} - 2 = C - 2 > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$.
Donc, par quotient,
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{C\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} = -\infty.$$
Deuxième cas, si $C < 2$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} C\,\mathrm{e}^{-x} - 2 = C - 2 < 0$ et donc,
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{C\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} = +\infty.$$
Troisième cas, $C = 2$, on obtient alors une forme indéterminée mais l'on reconnait la limite du taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ qui est bien dérivable en 0. Donc
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} = 2 \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} = 2f'(0) = -2\,\mathrm{e}^{-0} = -2.$$
Conclusion,
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{si } C > 2 \\ -2 & \text{si } C = 2 \\ +\infty & \text{si } C < 2. \end{cases}}$$

9. Puisque la fonction y considérée est une solution de (E), par définition elle est nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc notamment, y est continue en 0. Par suite, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y(x) = y(0) = 0$. Puisque $-x+2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$, on déduit de la question précédente que y admet une limite finie à gauche en 0 si et seulement si $B = 2$ et alors on a bien
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y(x) = -0 + 2 - 2 = 0.$$
$\boxed{\text{Donc il faut que } B = 2 \text{ et alors } y \text{ est continue à gauche en } 0.}$

10. D'après la relation $(\bigstar)$, pour $n = 3$, on sait qu'il existe une fonction $\tilde{\varepsilon}_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\tilde{\varepsilon}_3(x)$$
ou encore pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,
$$\mathrm{e}^{x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - x^3\tilde{\varepsilon}_3(-x).$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y(x) &= -x + 2 + \frac{B\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x}\\ &= -x + 2 + \frac{2\,\mathrm{e}^{-x} - 2}{x}\\ &= -x + 2 + \frac{2 - 2x + x^2 - \frac{x^3}{3} - 2x^3\tilde{\varepsilon}_3\,(-x) - 2}{x}\\ &= -x + 2 - 2 + x - \frac{x^2}{3} - 2x^2\tilde{\varepsilon}_3\,(-x)\\ &= -\frac{x^2}{3} - 2x^2\tilde{\varepsilon}_3\,(-x)\,.\end{aligned}$$

On pose alors $\varepsilon_3 : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ par $\varepsilon_3(x) = -\tilde{\varepsilon}_3\,(-x)$ et on a bien $\varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On obtient donc que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y(x) = -\frac{x^2}{3} + x^2\,\varepsilon_3(x).}$$

11. On a donc par passage à la limite dans l'égalité précédente quand $x \to 0$, $x < 0$, sachant que $\varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y(x) = 0.$$

D'autre part, $\forall A \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x + Ax\,\mathrm{e}^{x} = 0.$$

Enfin, $y(0) = 0$, conclusion

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0 = y(0).$$

Donc la fonction y est continue en 0. La fonction y étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme composée de fonctions continues, on en déduit que $\boxed{\text{la fonction } y \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

12. Pour que la fonction y soit dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit dérivable en 0 et donc par définition que la limite de son taux d'accroissement existe. Notamment la limite à droite de son taux d'accroissement doit exister (pente à droite de la fonction). Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{-x + Ax\,\mathrm{e}^{x}}{x} = -1 + A\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

La limite quand $x \to 0$, $x > 0$ de ce taux d'accroissement existe bien et vaut :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{y(x) - y(0)}{x} = -1 + A.$$

Mais il faut de surcroit que cette limite coïncide avec la limite à gauche de son taux d'accroissement. On a, d'après la question 10., pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = \frac{-\frac{x^2}{3} + x^2\,\varepsilon_3(x)}{x} = -\frac{x}{3} + x\,\varepsilon_3(x).$$

Et puisque $\varepsilon_3(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{y(x) - y(0)}{x} = 0.$$

Donc pour que y soit dérivable en 0, il faut que les deux limites soient égales et donc que $-1+A=0$ i.e. $A=1$. Dans ce cas, on a bien

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{y(x)-y(0)}{x} = 0.$$

$\boxed{\text{Conclusion, si } A=1, \text{ alors } y \text{ est dérivable en 0 et } y'(0)=0.}$

13. Si $n=1$, d'après (★), on sait qu'il existe $\varepsilon_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + x\,\varepsilon_1(x).$$

Par conséquent, puisque $A=1$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y(x) = -x + x\,\mathrm{e}^x = -x + x + x^2 + x^2\,\varepsilon_1(x) = x^2 + x^2\,\varepsilon_1(x).}$$