Correction du Devoir Maison 3
Calcul algébrique et fonctions usuelles

Du jeudi 13 novembre

Problème I - Calcul algébrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ et $(b_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Partie 1 : Ce n'est pas toujours mauvais de bien connaitre ses ex(emples)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a^n$ et $b_n = 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors les égalités suivantes :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 3a^k.$$
On reconnaît alors une somme géométrique de raison a. Conclusion,
$$\boxed{S_n = \begin{cases} 3\,(n+1) & \text{si } a = 1 \\ 3\frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \end{cases}.}$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a^n$ et $b_n = b^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit que
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n+1-1} a^k b^{n+1-1-k} = \frac{1}{a-b}\,(a-b) \sum_{k=0}^{n+1-1} a^k b^{n+1-1-k} \qquad \text{car } a \neq b.$$
On reconnaît alors la formule de Bernoulli à l'indice $n+1 \in \mathbb{N}^*$. Donc
$$S_n = \frac{1}{a-b}\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = \binom{n}{k}$ et $b_k = 2^k$. On a les égalités entre réels suivantes :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k}.$$
On reconnaît un binôme de Newton. Ainsi,
$$S_n = (1+2)^n = 3^n.$$
Conclusion,
$$\boxed{S_n = 3^n.}$$

4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n+1$ et $b_n = n^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)(n-k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left(n^2 - 2nk + k^2\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(n^2 k - 2nk^2 + k^3 + n^2 - 2nk + k^2\right) \\
&= n^2 \sum_{k=0}^{n} 1 + \left(n^2 - 2n\right) \sum_{k=0}^{n} k + (1-2n) \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k^3
\end{aligned}$$

Ces sommes étant usuelles, on obtient,

$$\begin{aligned}
S_n &= n^2 (n+1) + n(n-2)\frac{n(n+1)}{2} + (1-2n)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n+1)}{12}\left(12n + 6n(n-2) + 2(1-2n)(2n+1) + 3n(n+1)\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{12}\left(12n + 6n^2 - 12n + 2\left(1-4n^2\right) + 3n^2 + 3n\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{12}\left(n^2 + 3n + 2\right) \\
&= \frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{12}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.}$$

5. Soient $x \in \mathbb{R}^*$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = \operatorname{ch}(nx)$.

   (a) Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((n-k)x) &= \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}\,\frac{e^{(n-k)x} + e^{-(n-k)x}}{2} \\
&= \frac{e^{kx+(n-k)x} + e^{kx-(n-k)x} + e^{-kx+(n-k)x} + e^{-kx-(n-k)x}}{4} \\
&= \frac{e^{nx} + e^{-(n-2k)x} + e^{(n-2k)x} + e^{-nx}}{4} \\
&= \frac{\operatorname{ch}(nx) + \operatorname{ch}((n-2k)x)}{2}.
\end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2, \qquad \operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((n-k)x) = \frac{\operatorname{ch}(nx) + \operatorname{ch}((n-2k)x)}{2}.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition puis la question précédente,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((n-k)x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{ch}(nx) + \operatorname{ch}((n-2k)x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(nx) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}((n-2k)x).
\end{aligned}$$

La première somme est celle d'une constante car $\mathrm{ch}\,(nx)$ ne dépend pas du compteur k. Redéveloppons sous forme d'exponentielle la seconde :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(n+1)\,\mathrm{ch}\,(nx)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{(n-2k)x} + \mathrm{e}^{-(n-2k)x}}{2} \\ &= \frac{(n+1)\,\mathrm{ch}\,(nx)}{2} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{e}^{-2kx} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{e}^{2kx} \\ &= \frac{(n+1)\,\mathrm{ch}\,(nx)}{2} + \frac{\mathrm{e}^{nx}}{4}\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-2x}\right)^k + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{4}\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^k. \end{aligned}$$

On reconnait alors deux sommes géométriques de raison $\mathrm{e}^{-2x} \neq 1$ et $\mathrm{e}^{2x} \neq 1$ car $x \neq 0$:

$$S_n = \frac{(n+1)\,\mathrm{ch}\,(nx)}{2} + \frac{\mathrm{e}^{nx}}{4}\frac{1-\mathrm{e}^{-2(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}} + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{4}\frac{\mathrm{e}^{2(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{2x}-1}.$$

Par factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(n+1)\,\mathrm{ch}\,(nx)}{2} + \frac{\mathrm{e}^{nx}}{4}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\mathrm{e}^{-x}}\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}} + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{4}\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}}{\mathrm{e}^{x}}\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{(n+1)\,\mathrm{ch}\,(nx)}{2} + \frac{1}{4}\frac{2\,\mathrm{sh}\,((n+1)x)}{2\,\mathrm{sh}\,(x)} + \frac{1}{4}\frac{2\,\mathrm{sh}\,((n+1)x)}{2\,\mathrm{sh}\,(x)} \\ &= \frac{(n+1)\,\mathrm{ch}\,(nx)}{2} + \frac{\mathrm{sh}\,((n+1)x)}{2\,\mathrm{sh}\,(x)}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{(n+1)\,\mathrm{ch}\,(nx)}{2} + \frac{\mathrm{sh}\,((n+1)x)}{2\,\mathrm{sh}\,(x)}.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i+1}$ et $b_k = 1$. Par définition, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i+1}.$$

On est donc en présence d'une somme double triangulaire :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{i+1} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} \underbrace{\frac{1}{i+1}}_{\text{indépendant de } k} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\sum_{k=0}^{i} 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \times (i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} 1 \\ &= n+1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = n+1.}$$

Partie 2 : Parfois on reste même en relation de façon récurrente

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

On obtient alors l'expression suivante de S_n et on pose également T_n par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}.$$

7. On a les calculs suivants :

$$a_0 = \frac{1}{1}\binom{0}{0} = 1 \qquad a_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{1}{3}\frac{4!}{2!2!} = 2 \qquad a_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{1}{4}\frac{6!}{3!3!} = \frac{5\times 6}{2\times 3} = 5$$

$$a_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{1}{5}\frac{8!}{4!4!} = \frac{8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2} = 2\times 7 = 14.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
S_0 &= a_0 = 1\\
S_1 &= a_0a_1 + a_1a_0 = 1+1 = 2\\
S_2 &= a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 2+1+2 = 5\\
S_3 &= a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 = 5+2+2+5 = 14.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{a_0 = a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \qquad a_3 = 5 \qquad a_4 = 14 \qquad S_0 = 1 \qquad S_1 = 2 \qquad S_2 = 5 \qquad S_3 = 14.}$$

On constate que pour tout $n \in [\![0;3]\!]$, $S_n = a_{n+1}$, on conjecture donc que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = a_{n+1}.}$$

8. Calculons. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(n+2)\,a_{n+1} = 2\,(2n+1)\,a_n \quad &\Leftrightarrow \quad (n+2)\,\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = 2\,(2n+1)\,\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} = 2\frac{2n+1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!}{(n+1)^2\,(n)!\,(n)!} = 2\frac{2n+1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(2n+2)}{n+1} = 2 \quad \textit{car tous les termes sont strictement positifs}\\
&\Leftrightarrow \quad 2 = 2.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant naturellement vraie, on en conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)\,a_{n+1} = 2\,(2n+1)\,a_n.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} T_{n+1}+S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\, a_k a_{n+1-k} \\ &= (0+1)\, a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)\, a_k a_{n+1-k} \end{aligned}$$

Par le glissement d'indice $\tilde{k} = k-1$ i.e. $k = \tilde{k}+1$, on a si $k=1$, $\tilde{k}=0$ et si $k=n+1$, $\tilde{k}=n$. On obtient donc

$$\begin{aligned} T_{n+1}+S_{n+1} &= a_{n+1} + \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \left(\tilde{k}+2\right) a_{\tilde{k}+1} a_{n+1-\tilde{k}-1} && \textit{car } a_0 = 1 \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2)\, a_{k+1} a_{n-k} && \textit{car l'indice est muet.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+1}+S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2)\, a_{k+1} a_{n-k}.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on a

$$T_{n+1}+S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2)\, a_{k+1} a_{n-k}.$$

Or par la question 8., pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $(k+2)\, a_{k+1} = 2\,(2k+1)\, a_k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} T_{n+1}+S_{n+1} &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2\,(2k+1)\, a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \left(4k a_k a_{n-k} + 2 a_k a_{n-k}\right) \\ &= a_{n+1} + 4\sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} + 2\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \\ &= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n. \end{aligned}$$

Conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+1}+S_{n+1} = a_{n+1} + 4T_n + 2S_n.}$$

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'inversion d'indice $\tilde{k} = n-k$ i.e. $k = n-\tilde{k}$, si $k=0$, $\tilde{k}=n$ et si $k=n$, $\tilde{k}=0$. On écrit

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} = \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \left(n-\tilde{k}\right) a_{n-\tilde{k}} a_{\tilde{k}}$$

L'indice de sommation étant muet, on obtient bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k a_{n-k}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on a $T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\, a_k a_{n-k}$. Donc,

$$T_n = n \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k} = nS_n - T_n.$$

Autrement dit

$$2T_n = nS_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n = \frac{n}{2} S_n.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 10., on a

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 4T_n + 2S_n.$$

Or d'après la question précédente, $T_{n+1} = \frac{n+1}{2} S_{n+1}$ et $T_n = \frac{n}{2} S_n$. Ainsi,

$$\frac{n+1}{2} S_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 4\frac{n}{2} S_n + 2S_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + (2n+2)\, S_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2\,(n+1)\, S_n.}$$

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}(n)$: « $S_n = a_{n+1}$ ». Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$. Alors, on a déjà vu que $S_0 = 1 = a_1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. $S_n = a_{n+1}$. Alors, par la question précédente,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{2}{n+3} a_{n+1} + \frac{2}{n+3} 2\,(n+1)\, S_n && \textit{car } n+3>0 \\ &= \frac{2}{n+3} a_{n+1} + \frac{4\,(n+1)}{n+3} a_{n+1} && \textit{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{4n+6}{n+3} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Or par la question 8. au rang $n+1$, on a $(n+3)\, a_{n+2} = 2\,(2n+2+1)\, a_{n+1} = 2\,(2n+3)\, a_{n+1}$. Ainsi,

$$S_{n+1} = \frac{4n+6}{n+3} \frac{n+3}{2\,(2n+3)} a_{n+2} = a_{n+2}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est alors aussi vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = a_{n+1}.}$$

14. On procède par récurrence forte. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $a_n \in \mathbb{N}$. »

Initialisation. Par la question 7. $a_0 = 1 \in \mathbb{N}$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\forall k \in [\![0; n]\!],\ \mathscr{P}(k) \text{ vraie}) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ vraie. Supposons que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \qquad a_k \in \mathbb{N}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par la question précédente,

$$a_{n+1} = S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Or pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k \in \mathbb{N}$. De même si $k \in [\![0;n]\!]$, alors $n-k \in [\![0;k]\!]$, donc $a_{n-k} \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k a_{n-k} \in \mathbb{N}$. Donc en sommant,

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \in \mathbb{N}$$

et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \in \mathbb{N}.}$$

Problème II - Fonctions usuelles

On considère les fonctions définies lorsque c'est possible par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right).$$

On souhaite montrer l'égalité suivante :

$$\forall x \in [0;4[\,, \qquad g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}. \qquad (\bigstar)$$

Partie 1 : Même si g a du pi en plus, il n'est pas vache

1. Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathcal{D}_f \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant \frac{x}{2} - 1 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant 4.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}_f = [0;4]\,.}$$

2. On a

$$\begin{aligned} f(0) &= \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \\ f(2) &= \arcsin\left(\frac{2}{2} - 1\right) = \arcsin(0) = 0 \\ f\left(\sqrt{3}+2\right) &= \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2} - 1\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0) = -\frac{\pi}{2}, \qquad f(2) = 0, \qquad f\left(\sqrt{3}+2\right) = \frac{\pi}{3}.}$$

NB : on observe bien que $0 \in [0;4]$, $2 \in [0;4]$ *et* $0 < \sqrt{3}+2 \leqslant 2+2 = 4$.

3. Soit $\mathcal{D}_{f'}$ le domaine de dérivabilité de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_{f'} \quad &\Leftarrow \quad -1 < \frac{x}{2} - 1 < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{x}{2} < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x < 4. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_{f'} =]0;4[\,.}$$

4. Soit $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1/2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}+x-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-\frac{x^2}{4}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x\left(4-x\right)}}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0;4\right[, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x\left(4-x\right)}}.}$$

5. Soit I le domaine de définition de g. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in I \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{x}{4-x}} \text{ existe} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4-x \neq 0 \\ \frac{x}{4-x} \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4-x > 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 4-x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4 > x \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ 4 < x \end{cases} \quad \text{impossible} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x < 4. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \left[0;4\right[.}$$

6. On a

$$g(0) = 2\arctan(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(2) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{4-2}}\right) = 2\arctan\left(1\right) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(2) = \frac{\pi}{2}.}$$

On note bien que $0 \in I$ et $2 \in I$.

7. Soit $x \in I$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{\pi}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right) = \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right) = \frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{x}{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{par injectivité de la fonction arctan.} \end{aligned}$$

Attention à ne pas composer par la fonction tangente qui n'est pas injective elle !

$$\begin{aligned}
g(x)=\frac{\pi}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{4-x}=\frac{1}{3} && \text{car } \frac{x}{4-x}\geqslant 0\\
&\Leftrightarrow \quad 3x=4-x && \text{car } 4-x\neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad 4x=4\\
&\Leftrightarrow \quad x=1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x)=\frac{\pi}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x=1.}$$

Vérification, si $x=1$, $g(1)=2\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{4-1}}\right)=2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ *OK !*

8. Soit I' le domaine de dérivabilité de g. Soit $x\in I$ (sinon $g(x)$ n'est même pas définie). On a

$$\begin{aligned}
x\in I' \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{4-x}>0 \text{car } u\mapsto\sqrt{u} \text{ n'est pas dérivable en } 0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>0\\ 4-x>0\end{cases} && \text{car } x\geqslant 0 \text{ car } x\in I\\
&\Leftrightarrow \quad 0<x<4.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I'=\left]0;4\right[.}$$

9. Soit $x\in I'$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
g'(x)&=2\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)'}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)^2}\\
&=2\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{4-x}}}\left(\frac{x}{4-x}\right)'\frac{1}{1+\frac{x}{4-x}}\\
&=\sqrt{\frac{4-x}{x}}\frac{4-x+x}{(4-x)^2}\frac{1}{1+\frac{x}{4-x}}\\
&=\sqrt{\frac{4-x}{x}}\frac{4}{(4-x)^2}\frac{4-x}{4-x+x}\\
&=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{4-x}\\
&=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{4-x}}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\left]0;4\right[, \qquad g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x\,(4-x)}}.}$$

10. Par les questions 4. et 9.

$$\forall x\in\left]0;4\right[, \qquad f'(x)=g'(x).$$

Puisque $]0;4[$ est un intervalle, on en déduit que

$$\exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\left]0;4\right[, \qquad f(x)=g(x)+C.$$

En évaluant en 2, par les questions 2. et 6.

$$f(2) = g(2) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \frac{\pi}{2} + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = -\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \left]0;4\right[, \qquad f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) + \frac{\pi}{2} = g(x).$$

Or par passage à la limite quand $x \to 0$, par continuité de la fonction f en 0 de la fonction g en 0,

$$f(0) + \frac{\pi}{2} = g(0).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left[0;4\right[, \qquad g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}. \qquad\qquad (\bigstar)}$$

Partie 2 : La trigo fait aussi trivialement le tri

On fixe $x \in [0;4[$.

11. Soit $u \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
    (a) La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc en u et

    $$\boxed{\tan'(u) = 1 + \tan^2(u).}$$

    (b) D'autre part, on sait également que

    $$\boxed{\tan'(u) = \frac{1}{\cos^2(u)}.}$$

    (c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $u = \arctan(t)$. Alors $u \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Donc par les deux questions précédentes,

    $$\begin{aligned} 1 + \tan^2(u) = \frac{1}{\cos^2(u)} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \cos^2(u) = \frac{1}{1+\tan^2(u)} \qquad \text{car } \begin{cases} \cos^2(u) > 0 \\ 1 + \tan^2(u) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad \cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(t))} \\ &\Leftrightarrow \qquad \cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

    Conclusion,

    $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2}.}$$

12. On sait que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$. Donc,

$$\begin{aligned}
\cos(g(x)) &= \cos\left(2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)\right)\\
&= 2\cos^2\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)\right) - 1\\
&= 2\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)^2} - 1 \qquad \text{par la question précédente avec } t = \sqrt{\frac{x}{4-x}}\\
&= 2\frac{1}{1+\frac{x}{4-x}} - 1\\
&= 2\frac{4-x}{4-x+x} - 1\\
&= \frac{4-x}{2} - 1\\
&= \frac{2-x}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos(g(x)) = 1 - \frac{x}{2}.}$$

13. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(f(x))\\
&= -\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right)\right)\\
&= -\left(\frac{x}{2} - 1\right)\\
&= 1 - \frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{x}{2}.}$$

14. Par les deux questions précédentes,

$$\cos(g(x)) = 1 - \frac{x}{2} = \cos\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right).$$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{OU} \qquad g(x) = -f(x) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Or pour tout $u \in [-1;1]$, $\arcsin(u) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Donc

$$f(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) + \frac{\pi}{2} \in [0;\pi].$$

D'autre part, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $\arctan(u) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc pour $u = \sqrt{\frac{x}{4-x}} \in \mathbb{R}_+$,

$$g(x) = 2\arctan(u) \in [0;\pi[\,.$$

Nécessairement, $k = 0$ et

$$g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Ceci est vrai pour $x \in [0;4[$ quelconque. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in [0;4[\,, \qquad g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}. \qquad (\bigstar)}$$

Partie 3 : Dire que l'on finit en beauté n'est certainement pas une hyperbole

15. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\operatorname{ch}(y) = \sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} = \sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y} = 2\sqrt{2}.$$

Posons $X = \mathrm{e}^y$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(y) = \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad X + \frac{1}{X} = 2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 + 1 = 2\sqrt{2}X \qquad \text{car } X = \mathrm{e}^y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 8 - 4 = 4$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(y) = \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad X = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1 \ \text{ OU } \ X = \sqrt{2} - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^y = \sqrt{2}+1 \ \text{ OU } \ \mathrm{e}^y = \sqrt{2}-1 \\ &\Leftrightarrow \quad y = \ln\left(\sqrt{2}+1\right) \ \text{ OU } \ y = \ln\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad \text{car } \sqrt{2}+1 > 0 \text{ et } \sqrt{2}-1 > 0. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\ln\left(\sqrt{2}+1\right); \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}.}$$

16. Soit $A = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid 2\operatorname{ch}^2(y) \in [0;4[\right\}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in A \quad &\Leftrightarrow \quad 2\operatorname{ch}^2(y) \in [0;4[\\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2ch^2(y) < 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \operatorname{ch}^2(y) < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} < \operatorname{ch}(y) < \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{ch}(y) < \sqrt{2} \qquad \text{car } \operatorname{ch}(y) \geqslant 1. \end{aligned}$$

Or par le graphe de la fonction ch et la question précédente, on obtient

x	$-\infty$		$\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$		0		$\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$		$+\infty$
ch	$+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↘	1	↗	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Conclusion,

$$\boxed{A = \left]\ln\left(\sqrt{2}-1\right); \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right[.}$$

17. Soit $y \in A$. Posons $x = 2\operatorname{ch}^2(y)$. Par définition de A, $x \in [0;4[$. Donc par ($\bigstar$),

$$\begin{aligned}
& g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\sqrt{\frac{2\operatorname{ch}^2(y)}{4-2\operatorname{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\frac{2\operatorname{ch}^2(y)}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(y)}{2-\operatorname{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\operatorname{ch}^2(y) - 1\right) + \frac{\pi}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\frac{\operatorname{ch}(y)}{\sqrt{2-\operatorname{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\operatorname{ch}^2(y) - 1\right) + \frac{\pi}{2} \qquad \text{car } \operatorname{ch}(y) > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2\arctan\left(\frac{\operatorname{ch}(y)}{\sqrt{2-\operatorname{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\operatorname{sh}^2(y)\right) + \frac{\pi}{2} \qquad \text{car } \operatorname{ch}^2(y) - 1 = \operatorname{sh}^2(y).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in A, \qquad 2\arctan\left(\frac{\operatorname{ch}(y)}{\sqrt{2-\operatorname{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin\left(\operatorname{sh}^2(y)\right) + \frac{\pi}{2}.}$$