

## Correction du Devoir Maison 11

### Représentation matricielle et couple de variables aléatoires

*Du mardi 2 juin*

Les questions à corriger sont les questions : Problème I les questions 2, 7, 9, 12, 14, 17. Problème II les questions 1, 2b, 7, 11.

### Problème I - Représentation matricielle

#### Partie 1 : Faire fi de $P$ , c'est finalement y porter de l'intérêt

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$  et  $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$  la base canonique de  $E_n$ . On confond dans toute cette partie le polynôme  $P$  et la fonction polynomiale  $\tilde{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$x \mapsto P(x).$$

Pour tout  $P \in E$ , on pose  $\varphi_1(P) = \int_X^{X+1} \tilde{P}(t) dt$ .

1. Soit  $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ . On pose  $P_j = \varphi_1(X^j)$ . On a les égalités suivantes :

$$\varphi_1(P_j) = \int_X^{X+1} t^j dt = \left[ \frac{t^{j+1}}{j+1} \right]_{t=X}^{t=X+1} = \frac{(X+1)^{j+1} - X^{j+1}}{j+1}.$$

Donc par la formule du binôme de Newton,

$$P_j = \frac{1}{j+1} \left( \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} X^i - X^{j+1} \right) = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} X^i.$$

Conclusion,

$$P_j = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} X^i.$$

2. On veut montrer que  $\varphi_1$  est un endomorphisme de  $E_n$ . Autrement dit, montrons que

- (i)  $\varphi_1$  est linéaire,
- (ii)  $\varphi_1$  va de  $E_n$  dans  $E_n$ .

Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $(P, Q) \in E_n^2$ . Alors,

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda P + \mu Q) &= \int_X^{X+1} (\lambda P + \mu Q)(t) dt \\ &= \int_X^{X+1} \lambda P(t) + \mu Q(t) dt \\ &= \lambda \int_X^{X+1} P(t) dt + \mu \int_X^{X+1} Q(t) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda \varphi_1(P) + \mu \varphi_1(Q). \end{aligned}$$

Donc (i)  $\varphi_1$  est linéaire.

De plus,  $\varphi_1$  est bien définie sur  $E_n$  car toute fonction polynomiale est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[x; x + 1]$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Montrons que pour tout  $P \in E_n$ , on a  $\varphi_1(P) \in E_n$ . Soit  $P = \sum_{j=0}^n a_j X^j \in E_n$ . Alors, par linéarité de  $\varphi_1$ ,

$$\varphi_1(P) = \varphi_1\left(\sum_{j=0}^n a_j X^j\right) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_1(X^j) = \sum_{j=0}^n a_j P_j.$$

Or pour tout  $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , par la question précédente  $P_j = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} X^i \in \mathbb{R}_j[X] \subset E_n$ . Donc par stabilité de  $E_n$  par combinaison linéaire (en tant qu'espace vectoriel), on a

$$\varphi_1(P) = \sum_{j=0}^n a_j P_j \in E_n.$$

Ceci étant vrai pour  $P \in E_n$  quelconque, on en déduit que (ii),  $\varphi_1$  va bien de  $E_n$  dans  $E_n$ . Conclusion,

$$\varphi_1 \text{ est un endomorphisme de } E_n.$$

3. Par la question 1.  $P_j = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} X^i$ . Donc directement,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(P_j) = \begin{bmatrix} \frac{1}{j+1} \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{\binom{j+1}{i}}{j+1} \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1} = \text{mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$ . Soit  $(i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$ . Le nombre  $a_{i,j}$  est la coordonnée de  $\varphi_1(X^{j-1})$  selon le vecteur  $X^{i-1}$ . Donc par la question 1.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \frac{\binom{j}{i-1}}{j} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Attention, le fait que  $\mathcal{B}_1$  est numérotée à partir de 0 décale tous les indices...

5. (a) D'après la question précédente, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$ ,  $i > j$ , on a  $a_{i,j} = 0$ . Donc la matrice  $A$  est triangulaire supérieure. De plus les éléments diagonaux sont donnés pour tout  $i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$ , par  $a_{i,i} = \frac{\binom{i}{i-1}}{i} = \frac{i}{i} = 1$ . Conclusion,

$$A \text{ est triangulaire supérieure et pour tout } i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, a_{i,i} = 1.$$

(b) D'après la question précédente  $A$  est triangulaire et a des coefficients diagonaux tous non nuls.  $A$  est donc une matrice échelonnée avec un pivot  $a_{i,i}$  à chaque ligne. Donc  $A$  est inversible et nécessairement,

$$\text{rg}(A) = n + 1.$$

(c) D'après la question précédente et le cours, on sait que  $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$  est inversible i.e.  $\varphi_1$  est bijective. Or  $\varphi_1$  est un endomorphisme (question 2.). Conclusion,

$\varphi_1$  est un automorphisme.

6. On suppose dans cette question que  $n = 2$ .

(a) Par la question 4., on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Inversons la matrice  $A$  :

$$\begin{array}{lll} A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 & I_3 \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 - \frac{1}{3}L_3 & \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Par conséquent,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pense à vérifier son résultat. Donc pour tout  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E_2$ , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1^{-1}(P)) = \text{mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1^{-1}) \times \text{mat}_{\mathcal{B}_1}(P) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \\ a_1 - a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\varphi_1^{-1}(P) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + (a_1 - a_2)X + a_2X^2.$$

Conclusion,

$$\varphi_1^{-1} : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 & \mapsto a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + (a_1 - a_2)X + a_2X^2. \end{array}$$

## Partie 2 : Les parents de ch et sh ont adopté sin et ont formé un espace à eux

On pose  $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$  et on définit  $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3) \in E^3$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = e^{-x}, \quad u_3(x) = \sin(2\pi x).$$

On pose  $H = \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$  et  $\varphi_2$  la fonction définie par

$$\forall u \in H, \quad \varphi_2(u) : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \int_x^{x+1} u(t) dt. \end{array}$$

7. Soit  $u \in H$ . Alors  $u$  est combinaison linéaire de  $u_1, u_2$  et  $u_3$ . Or ces trois fonctions sont continues donc  $u \in E$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $u$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $[x; x+1]$ . Donc  $\int_x^{x+1} u(t) dt$  existe. Ceci étant vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on en déduit que  $\varphi_2(u)$  existe. Ceci étant vrai pour tout  $u \in H$ , on en conclut que

$\varphi_2$  est bien définie sur  $H$ .

8. Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et  $(u, v) \in E^2$ . Alors,  $\lambda u + \mu v$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $\lambda u + \mu v \in E$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_2(\lambda u + \mu v)(x) &= \int_x^{x+1} (\lambda u + \mu v)(t) dt \\ &= \int_x^{x+1} \lambda u(t) + \mu v(t) dt \\ &= \lambda \int_x^{x+1} u(t) dt + \mu \int_x^{x+1} v(t) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda \varphi_2(u)(x) + \mu \varphi_2(v)(x). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on en déduit que

$$\varphi_2(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi_2(u) + \mu \varphi_2(v).$$

Conclusion,

$\varphi_2$  est linéaire.

9. (i) Par définition,  $\mathcal{B}_2$  est une famille génératrice de  $H$ .

(ii) Montrons que  $\mathcal{B}_2$  est libre. Soient  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_E.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \lambda_3 u_3(x) = 0_{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} + \lambda_3 \sin(2\pi x) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Or

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \\ e^{-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \sin(2\pi x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 2\pi x - 8\pi^3 \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \lambda_1 \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + \lambda_2 \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &\quad + \lambda_3 \left( 2\pi x - 8\pi^3 \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\pi \lambda_3) x + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{x^2}{2} + (\lambda_1 - \lambda_2 - 8\pi^2 \lambda_3) \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\pi \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 8\pi^2 \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ 2\lambda_1 + 2\pi \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2\lambda_1 - 8\pi^2 \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc  $\mathcal{B}_2$  est une famille libre.

On pouvait aussi évaluer en 0 et 1 pour montrer que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  puis en  $\frac{\pi}{4}$  pour obtenir  $\lambda_3 = 0$  par exemple.

Par (i) et (ii) on conclut que

$$\boxed{\mathcal{B}_2 \text{ est une base de } H,}$$

et notamment  $\dim(H) = \text{Card}(\mathcal{B}_2) = 3$ .

10. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi_2(u_1)(x) &= \int_x^{x+1} u_1(t) dt = \int_x^{x+1} e^t dt = e^{x+1} - e^x \\ \varphi_2(u_2)(x) &= \int_x^{x+1} u_2(t) dt = \int_x^{x+1} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{t=x}^{t=x+1} = e^{-x} - e^{-x-1} \\ \varphi_2(u_3)(x) &= \int_x^{x+1} u_3(t) dt = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t) dt = \left[ \frac{-\cos(2\pi t)}{2\pi} \right]_{t=x}^{t=x+1} \\ &= \frac{\cos(2\pi x) - \cos(2\pi x + 2\pi)}{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

par  $2\pi$  périodicité du cosinus sur  $\mathbb{R}$ . Conclusion,

$$\boxed{\varphi_2(u_1) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x+1} - e^x \end{array}, \quad \varphi_2(u_2) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} - e^{-x-1} \end{array}, \quad \varphi_2(u_3) = 0_H.}$$

11. De la question précédente, on remarque que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_2(u_1)(x) = (e-1)e^x$ . Donc

$$\varphi_2(u_1) = (e-1)u_1 \in H.$$

De même,  $\varphi_2(u_2) = (1-e^{-1})u_2 \in H$  et bien sûr  $\varphi_2(u_3) = 0_H \in H$ . Donc pour tout  $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ ,  $\varphi_2(u_i) \in H$ . Donc par linéarité de  $\varphi_2$ ,

$$\varphi_2(H) = \varphi_2(\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)) \underset{\text{linéarité}}{=} \text{Vect}(\underbrace{\varphi_2(u_1)}_{\in H}, \underbrace{\varphi_2(u_2)}_{\in H}, \underbrace{\varphi_2(u_3)}_{\in H}) \underset{H \text{ espace vectoriel}}{\subset} H.$$

Donc on a bien  $\varphi_2 : H \rightarrow H$ . Or  $\varphi_2$  est linéaire (question 8.). Conclusion,

$$\boxed{\varphi_2 \text{ est un endomorphisme de } H.}$$

12. On a vu que  $\varphi_2(u_1) = (e-1)u_1$ ,  $\varphi_2(u_2) = (1-e^{-1})u_2$  et  $\varphi_2(u_3) = 0_E$ . D'où,

$$\boxed{B = \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} e-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

13. On pose  $u = 2e^x - e^{-x}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par la question précédente, la matrice  $B$  étant diagonale, on a directement,

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} (e-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1-e^{-1})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Posons  $U = \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(u)$  et  $U_n = \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi_2^n(u))$ . Alors, on a

$$U_n = B^n U.$$

On va donc calculer  $U$  pour obtenir  $U_n$  et on en déduira  $\varphi_2^n(u)$ . On observe que

$$u = 2u_1 - u_2.$$

Donc  $U = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ainsi,

$$U_n = \begin{pmatrix} (e-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1-e^{-1})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(e-1)^n \\ -(1-e^{-1})^n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi_2^n(u) = 2(e-1)^n u_1 - (1-e^{-1})^n u_2.}$$

**Partie 3 :**  $A = PDQ^{-1}$   $A = PDQ^{-1}$   $A = PDQ^{-1}$   $A = PDQ^{-1}$   $A = PDQ^{-1}$   $A = PDQ^{-1}$

On définit  $\mathcal{B}_3 = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v_1(x) = \operatorname{ch}(x), \quad v_2(x) = \operatorname{sh}(x), \quad v_3(x) = u_3 \left( x + \frac{1}{2} \right).$$

14. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$v_1(x) = \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}u_1(x) + \frac{1}{2}u_2(x)$$

$$v_2(x) = \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}u_1(x) - \frac{1}{2}u_2(x)$$

$$v_3(x) = u_3 \left( x + \frac{1}{2} \right) = \sin \left( 2\pi \left( x + \frac{1}{2} \right) \right) = \sin(2\pi x + \pi) = -\sin(2\pi x) = -u_3(x).$$

Donc  $v_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \in H$ ,  $v_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 \in H$  et  $v_3 = -u_3 \in H$ . Donc

$$\boxed{\mathcal{B}_3 \text{ est une famille de } H.}$$

De plus de ces égalités, on en déduit que

$$\boxed{P = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

15. On pouvait naturellement classiquement inverser  $P$  par des opérations élémentaires. Remarquons ici directement que  $u_1 = v_1 + v_2$ ,  $u_2 = v_1 - v_2$  et  $u_3 = -v_3$ . Le système associé à  $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$  étant inversible, on en déduit que  $\boxed{P \text{ est inversible}}$  et de plus,

$$\boxed{P^{-1} = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_3}(\mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*On vérifie facilement que la matrice trouvée fonctionne bien.*

16. Puisque  $P$  est inversible,  $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3)$  est une matrice de changement de base et donc

$$\boxed{\mathcal{B}_3 \text{ est bien une base de } H.}$$

17. Soit  $C = \text{mat}_{\mathcal{B}_3}(\varphi_2)$ . Méthode 1, par la formule de changement de base. On a  $B = \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi_2)$  et  $P = P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_3} = \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3)$ . Donc par la formule de changement de base,

$$\begin{aligned}
 C &= P^{-1}BP \\
 &= P^{-1} \begin{pmatrix} e-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{par les questions 12. et 14.} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e-1 & e-1 & 0 \\ 1-e^{-1} & e^{-1}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{par la question 15.} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e-e^{-1} & e+e^{-1}-2 & 0 \\ e+e^{-1}-2 & e-e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$C = \begin{pmatrix} \text{sh}(1) & \text{ch}(1) - 1 & 0 \\ \text{ch}(1) - 1 & \text{sh}(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(v_1)(x) &= \int_x^{x+1} \text{ch}(t) dt \\
 &= [\text{sh}(t)]_{t=x}^{t=x+1} \\
 &= \text{sh}(x+1) - \text{sh}(x) \\
 &= \text{sh}(x)\text{ch}(1) + \text{ch}(x)\text{sh}(1) - \text{sh}(x) \\
 &= \text{sh}(1)\text{ch}(x) + (\text{ch}(1) - 1)\text{sh}(x).
 \end{aligned}$$

D'où  $\varphi_2(v_1) = \text{sh}(1)v_1 + (\text{ch}(1) - 1)v_2$ . Donc  $\text{mat}_{\mathcal{B}_3}(\varphi_2(v_1)) = \begin{bmatrix} \text{sh}(1) \\ \text{ch}(1) - 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . De même, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(v_2)(x) &= \int_x^{x+1} \text{sh}(t) dt \\
 &= [\text{ch}(t)]_{t=x}^{t=x+1} \\
 &= \text{ch}(x+1) - \text{ch}(x) \\
 &= \text{ch}(x)\text{ch}(1) + \text{sh}(x)\text{sh}(1) - \text{ch}(x) \\
 &= (\text{ch}(1) - 1)\text{ch}(x) + \text{sh}(1)\text{sh}(x).
 \end{aligned}$$

Donc  $\text{mat}_{\mathcal{B}_3}(\varphi_2(v_2)) = \begin{bmatrix} \text{ch}(1) - 1 \\ \text{sh}(1) \\ 0 \end{bmatrix}$ . Enfin,

$$\begin{aligned} \varphi_2(v_3)(x) &= \int_x^{x+1} \sin(2\pi t + \pi) dt \\ &= - \int_x^{x+1} \sin(2\pi t) dt \\ &= - \left[ -\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi} \right]_{t=x}^{t=x+1} \\ &= \frac{\cos(2\pi(x+1)) - \cos(2\pi x)}{2\pi} \\ &= \frac{\cos(2\pi x) - \cos(2\pi x)}{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$C = \begin{pmatrix} \text{sh}(1) & \text{ch}(1) - 1 & 0 \\ \text{ch}(1) - 1 & \text{sh}(1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Problème II - Couples de variables aléatoires

On lance à plusieurs reprises une pièce retournant pile avec une probabilité  $p \in ]0; 1[$  et face avec une probabilité  $q = 1 - p \in ]0; 1[$ . On suppose les différents lancers identiques et indépendants. On s'intéresse aux nombres de séries de résultats identiques. Plus précisément pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $N_n$  le nombre de lots de résultats identiques consécutifs observés entre 1 et  $n$  (y compris les lots de longueur 1). Par exemple, en notant  $F$  le fait d'obtenir face et  $P$  le fait d'obtenir pile, dans la série  $FFPFPPFFPPP$ . Alors pour un tel  $\omega$ , on a  $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$  puis  $N_3(\omega) = 2$ ,  $N_4(\omega) = 3$ ,  $N_5(\omega) = N_6(\omega) = 4$ ,  $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 5$  et enfin  $N_9(\omega) = N_{10}(\omega) = N_{11}(\omega) = 6$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire retournant 1 si la pièce a donné pile et 0 sinon.

### Partie 1 : Rien à voir avec du diazote

- En deux lancers, il est possible d'effectuer  $PP$ ,  $PF$ ,  $FP$  ou  $FF$ . On obtient pour  $N_2$  dans chaque cas 1, 2, 2 et 1 respectivement. Donc l'univers image de  $N_2(\Omega)$  est donné par  $N_2(\Omega) = \{1; 2\}$ , en effet ou les deux lancers sont identiques et  $N_2 = 1$  ou les deux lancers sont distincts et  $N_2 = 2$ . Dès lors,  $(N_2 - 1)(\Omega) = \{0; 1\}$ . Nécessairement, on en déduit que  $N_2 - 1$  est une loi de Bernoulli. Calculons son paramètre :

$$\mathbb{P}(N_2 - 1 = 1) = \mathbb{P}(N_2 = 2) = \mathbb{P}(X_1 \neq X_2).$$

Or  $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$  forme un système complet d'événements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2 - 1 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \mid X_1 = 0) \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \mid X_1 = 1) \mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) \mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = 1) \mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0) \mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &\hspace{15em} \text{car les deux lancers sont indépendants} \\ &= p \times (1 - p) + (1 - p) \times p \hspace{5em} \text{car } X_1 \sim \mathcal{B}(p) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{B}(p) \\ &= 2p(1 - p). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{N_2 - 1 \sim \mathcal{B}(2p(1 - p))}.$$

On a donc directement d'après le cours,

$$\mathbb{E}(N_2 - 1) = 2p(1 - p)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(N_2 - 1) &= 2p(1 - p)(1 - 2p(1 - p)) \\ &= 2p(1 - p)(1 - 2p + 2p^2). \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(N_2) = \mathbb{E}(N_2 - 1) + 1 = 2p(1 - p) + 1 = 1 + 2p - 2p^2.$$

Par propriété de la variance,

$$\mathbb{V}(N_2) = \mathbb{V}(N_2 - 1) = 2p(1 - p)(1 - 2p + 2p^2).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(N_2) = 1 + 2p - 2p^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_2) = 2p(1 - p)(1 - 2p + 2p^2).}$$

2. (a) On observe que  $(N_2 = 1)$  est l'évènement les deux premiers lancers sont identiques :  $(X_1 = X_2)$ . Dans ce cas, pour obtenir  $(N_3 = 2)$ , il faut ajouter un troisième lancer différent des deux premiers et donc

$$\boxed{(N_2 = 1, N_3 = 2) = (X_1 = X_2 \neq X_3).}$$

- (b) Par la question précédente, on a

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 \neq X_3).$$

Or  $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$  forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 \neq X_3, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 \neq X_3, X_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \mathbb{P}(X_2 = 0) \mathbb{P}(X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 1) \mathbb{P}(X_3 = 0) \\ &\qquad\qquad\qquad \text{car } X_1, X_2, X_3 \text{ sont indépendantes} \\ &= (1 - p)(1 - p)p + pp(1 - p) \\ &= p(1 - p)(1 - p + p). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) = p(1 - p).}$$

3. On note qu'en trois lancers, il est possible de faire

- trois lancers alternés :  $PF P$  ou  $F P F$  et donc  $N_3 = 3$ ,
- deux lancers identiques et un troisième distincts :  $PP F$ ,  $F F P$ ,  $P F F$ ,  $F P P$  et donc  $N_3 = 2$
- ou enfin trois lancers identiques :  $PPP$  ou  $FFF$  et donc  $N_3 = 1$ .

D'où

$$N_3(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket.$$

Dès lors, l'univers image du couple  $(N_2, N_3)$  est inclus dans  $\llbracket 1; 2 \rrbracket \times \llbracket 1; 3 \rrbracket$ . On procède de la même façon que dans la question précédente, on observe que  $(N_2 = 1, N_3 = 1) = (X_1 = X_2 = X_3)$ . Donc, toujours par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3, X_1 = 1) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \mathbb{P}(X_2 = 0) \mathbb{P}(X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 1) \mathbb{P}(X_3 = 1) \\
 &\hspace{15em} \text{par indépendance.} \\
 &= (1 - p)^3 + p^3 \\
 &= 1 - 3p + 3p^2 - p^3 + p^3 \\
 &= 1 - 3p + 3p^2.
 \end{aligned}$$

On observe qu'il est impossible d'avoir moins de séries à l'étape 3 qu'à l'étape 2. Donc

$$\mathbb{P}(N_2 = 2, N_3 = 1) = 0.$$

Par la question précédente,  $\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2) = p(1 - p)$ .

L'évènement  $(N_2 = 2, N_3 = 2) = (X_1 \neq X_2 = X_3)$ . Donc

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_2 = 2, N_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 = X_3, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 = X_3, X_1 = 1) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \mathbb{P}(X_2 = 1) \mathbb{P}(X_3 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 0) \mathbb{P}(X_3 = 0) \\
 &\hspace{15em} \text{par indépendance} \\
 &= (1 - p)p^2 + p(1 - p)^2 \\
 &= (1 - p)p(p + 1 - p) \\
 &= (1 - p)p.
 \end{aligned}$$

Egalement,

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 3) = 0.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_2 = 2, N_3 = 3) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq X_3) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \\
 &= (1 - p)p(1 - p) + p(1 - p)p \\
 &= (1 - p)p(1 - p + p) \\
 &= p(1 - p).
 \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient le tableau suivant :

$N_2 = i \setminus N_3 = j$	1	2	3
1	$1 - 3p + 3p^2$	$p(1 - p)$	0
2	0	$p(1 - p)$	$p(1 - p)$

*NB : on vérifie que  $1 - 3p + 3p^2 + 3p(1 - p) = 1 - 3p + 3p^2 + 3p - 3p^2 = 1$  OK!*

4. Par la question 1.

$$\mathbb{P}(N_2 = 1) = \mathbb{P}(N_2 - 1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(N_2 - 1 = 1) = 1 - 2p(1 - p) = 1 - 2p + 2p^2 = (1 - p)^2 + p^2 > 0.$$

Donc  $\mathbb{P}(N_2 = 1) \neq 0$  et par définition, pour tout  $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ , on a

$$\mathbb{P}(N_3 = i \mid N_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = 1)}{\mathbb{P}(N_2 = 1)} = \frac{\mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = 1)}{1 - 2p + 2p^2}.$$

Par la deuxième ligne du tableau de la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_3 = 1 \mid N_2 = 1) &= \frac{1 - 3p + 3p^2}{1 - 2p + 2p^2}, \\ \mathbb{P}(N_3 = 2 \mid N_2 = 1) &= \frac{p(1 - p)}{1 - 2p + 2p^2}, \\ \mathbb{P}(N_3 = 3 \mid N_2 = 1) &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion, la loi conditionnelle de  $N_3$  sachant  $(N_2 = 1)$  est donnée par

$j$	1	2	3
$\mathbb{P}(N_3 = j \mid N_2 = 1)$	$\frac{1-3p+3p^2}{1-2p+2p^2}$	$\frac{p(1-p)}{1-2p+2p^2}$	0

5. Soit  $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ . On sait que  $((N_2 = 1), (N_2 = 2))$  forme un système complet d'évènements (incompatibles) donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(N_3 = i) = \mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = 1) + \mathbb{P}(N_3 = i, N_2 = 2).$$

Donc d'après la loi conjointe donnée par le tableau de la question 3. on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_3 = 1) &= 1 - 3p + 3p^2 + 0 = 1 - 3p + 3p^2 \\ \mathbb{P}(N_3 = 2) &= p(1 - p) + p(1 - p) = 2p(1 - p) \\ \mathbb{P}(N_3 = 3) &= 0 + p(1 - p) = p(1 - p). \end{aligned}$$

Conclusion, la loi marginale de  $N_3$  est donnée par

$i$	1	2	3
$\mathbb{P}(N_3 = i)$	$1 - 3p + 3p^2$	$2p(1 - p)$	$p(1 - p)$

6. Par les questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 3) = 0$$

mais

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2 = 1) \mathbb{P}(N_3 = 3) &= (1 - 2p(1 - p)) p(1 - p) \\ &= (1 - 2p + 2p^2) p(1 - p) \\ &= ((1 - p)^2 + p^2) p(1 - p) > 0 \quad \text{car } p \in ]0; 1[. \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 3) \neq \mathbb{P}(N_2 = 1) \mathbb{P}(N_3 = 3).$$

Conclusion,

Les variables  $N_2$  et  $N_3$  ne sont pas indépendantes.

7. Par définition,

$$\mathbb{E}(N_3) = \sum_{k=1}^3 k\mathbb{P}(N_3 = k).$$

Donc par la question 5.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_3) &= 1 \times (1 - 3p + 3p^2) + 2 \times 2p(1 - p) + 3 \times p(1 - p) \\ &= 1 - 3p + 3p^2 + 7p(1 - p) \\ &= 1 + 4p - 4p^2.\end{aligned}$$

D'autre part, par le théorème de transfert puis la question 5.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_3^2) &= \sum_{k=1}^3 k^2\mathbb{P}(N_3 = k) = 1^2 \times (1 - 3p + 3p^2) + 2^2 \times 2p(1 - p) + 3^2 \times p(1 - p) \\ &= 1 - 3p + 3p^2 + 17p(1 - p) \\ &= 1 + 14p - 14p^2.\end{aligned}$$

Donc par la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N_3) &= \mathbb{E}(N_3^2) - \mathbb{E}(N_3)^2 = 1 + 14p - 14p^2 - (1 + 4p - 4p^2)^2 \\ &= 1 + 14p - 14p^2 - 1 - 16p^2 - 16p^4 - 8p + 8p^2 + 32p^3 \\ &= 6p - 22p^2 + 32p^3 - 16p^4 \\ &= 2p(3 - 11p + 16p^2 - 8p^3) \\ &= 2p(1 - p)(3 - 8p + 8p^2).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(N_3) = 1 + 4p - 4p^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_3) = 2p(1 - p)(3 - 8p + 8p^2).}$$

## Partie 2 : Apprenons à la génération Z à générer du résultat avec la génératrice

On suppose dans toute la suite que  $p = q = \frac{1}{2}$  i.e. que la pièce est équilibrée. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

8. On note que  $(N_n = 1)$  équivaut à avoir obtenu toujours le même résultat au cours des  $n$  lancers :

$$\mathbb{P}(N_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \dots = X_n).$$

Or  $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$  forme un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \dots = X_n, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \dots = X_n, X_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0) \dots \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) \dots \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &\hspace{15em} \text{par indépendance} \\ &= (1 - p)^n + p^n \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{car } p = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Au contraire,  $(N_n = n)$  équivaut à avoir eu des lancers alternés à chaque fois :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n = n) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq \dots \neq X_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq \dots \neq X_n, X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_1 \neq X_2 \neq \dots \neq X_n, X_1 = 1).\end{aligned}$$

Supposons  $n$  pair,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_n = n) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, \dots, X_n = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, \dots, X_n = 0) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \mathbb{P}(X_2 = 1) \dots \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(X_2 = 0) \dots \mathbb{P}(X_n = 0) \\
 &\quad \text{par indépendance} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

De la même façon, si  $n$  est impair,  $\mathbb{P}(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ . Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(N_n = 1) = \mathbb{P}(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

9. Soit  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ . Puisque  $((X_n = 0), (X_n = 1))$  forme un système complet, on a par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1).$$

On note que si  $(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 0)$  est réalisé alors, les lancers  $n$  et  $n + 1$  sont distincts et donc  $N_{n+1} = N_n + 1$  i.e.  $N_n = N_{n+1} - 1$ . Dès lors,

$$(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 0) = (N_n = k - 1, X_{n+1} = 1, X_n = 0).$$

Au contraire, si  $(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1)$  est réalisé, alors les lancers  $n$  et  $n + 1$  sont identiques, donc  $N_{n+1} = N_n$  et ainsi

$$(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1) = (N_n = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1).$$

Par suite,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(N_n = k - 1, X_{n+1} = 1, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_n = k, X_{n+1} = 1, X_n = 1).$$

De plus, on note que  $N_n$  dépend entièrement de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et  $X_{n+1}$  est indépendante de ces variables aléatoires. Par conséquent,  $X_{n+1}$  et  $N_n$  sont indépendantes. Mieux,  $X_{n+1}$  est indépendante du couple  $(N_n, X_n)$ . Donc

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1).$$

Or  $X_{n+1} \sim \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ . D'où,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 0) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 0).}$$

10. Soit  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ , de même que dans la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 0, X_n = 1) \\
 &= \mathbb{P}(N_n = k, X_{n+1} = 0, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_n = k - 1, X_{n+1} = 0, X_n = 1) \\
 &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \mathbb{P}(N_n = k, X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 1) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k, X_n = 0) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 1).
 \end{aligned}$$

Puisque  $((X_{n+1} = 0), (X_{n+1} = 1))$  forme un système complet d'évènements, par le formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1).$$

Donc par ce qui précède et la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{n+1} = k) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 1) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 0) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 0) + \mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 1) + \mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 0)) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1), \end{aligned}$$

par la formule des probabilités totales car  $((X_n = 0), (X_n = 1))$  forme un système complet d'évènements. Donc

$$\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1).$$

De plus, si  $k = 1$ , alors par la question 9.  $\mathbb{P}(N_{n+1} = 1) = \frac{1}{2^n}$ ,  $\mathbb{P}(N_n = 1) = \frac{1}{2^{n-1}}$  et  $\mathbb{P}(N_n = 0) = 0$ .  
Donc

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} + 0 = \frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(N_{n+1} = k).$$

De même, si  $k = n + 1$ ,  $\mathbb{P}(N_{n+1} = n + 1) = \frac{1}{2^n}$ ,  $\mathbb{P}(N_n = n + 1) = 0$  et  $\mathbb{P}(N_n = 0) = n + 1 - 1 = \mathbb{P}(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ . Donc

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1) = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} = \mathbb{P}(N_{n+1} = k).$$

Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1).}$$

11. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Par définition,

$$G_{N_{n+1}}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_{n+1} = k).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} G_{N_{n+1}}(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} t^k \left( \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k - 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n t^k \mathbb{P}(N_n = k) + 0 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k - 1) + 0 \\ &= \frac{1}{2} G_{N_n}(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n+1} t^k \mathbb{P}(N_n = k - 1). \end{aligned}$$

Posons  $\tilde{k} = k - 1$  dans la seconde somme. Alors,

$$\begin{aligned} G_{N_{n+1}}(t) &= \frac{1}{2}G_{N_n}(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n t^{k+1} \mathbb{P}(N_n = k) \\ &= \frac{1}{2}G_{N_n}(t) + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^n t^k \mathbb{P}(N_n = k) \\ &= \frac{1}{2}G_{N_n}(t) + \frac{t}{2}G_{N_n}(t). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{N_{n+1}}(t) = \frac{1+t}{2}G_{N_n}(t).}$$

12. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Par la question précédente, on observe que la suite de réels  $(G_{N_n}(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1+t}{2}$ . Donc

$$\forall n \geq 2, \quad G_{N_n}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} G_{N_2}(t).$$

Or par la question 1.  $\mathbb{P}(N_2 = 2) = 2p(1-p) = 2 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  et donc  $\mathbb{P}(N_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(N_2 = 2) = \frac{1}{2}$ . Ainsi,

$$G_{N_2}(t) = t\mathbb{P}(N_2 = 1) + t^2\mathbb{P}(N_2 = 2) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} = \frac{t(1+t)}{2}.$$

Ainsi,

$$G_{N_n}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \frac{t(1+t)}{2} = t \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{N_n}(t) = t \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1} .}$$

13. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . On sait que  $\mathbb{E}(N_n) = G'_{N_n}(1)$ . Or par la question précédente,  $G_{N_n}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad G'_{N_n}(t) &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1} + t(n-1) \frac{1}{2} \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1+t}{2} + \frac{(n-1)t}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \frac{1+nt}{2}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(N_n) = G'_{N_n}(1) = \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} \frac{1+n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

De plus, on a également,

$$\mathbb{V}(N_n) = G''_{N_n}(1) + G'_{N_n}(1) - G'_{N_n}(1)^2.$$

Or pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , comme  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} G''_{N_n}(t) &= (n-2) \frac{1}{2} \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3} \frac{1+nt}{2} + \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-2} \frac{n}{2} \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{(n-2)(1+nt)}{4} + \frac{1+tn}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3} \frac{n-2+n(n-2)t+n+nt}{4} \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-3} \frac{2n-2+n(n-1)t}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(N_n) &= \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-3} \frac{2n-2+n(n-1)}{4} + \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n^2+n-2}{4} + \frac{2n+2}{4} - \frac{n^2+2n+1}{4} \\ &= \frac{n-1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(N_n) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_n) = \frac{n-1}{4}.}$$

En particulier si  $n = 3$ , on obtient

$$\mathbb{E}(N_3) = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_3) = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Or par la question 7. avec  $p = 1/2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_3) &= 1 + 4p - 4p^2 = 1 + 2 - 1 = 2 \\ \mathbb{V}(N_3) &= 2p(1-p)(3-8p+8p^2) = \frac{1}{2}(3-4+2) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

les résultats obtenus sont en accord avec la question 7.

14. Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Par la question 12. on a

$$G_{N_n}(t) = t \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n-1}.$$

Par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} G_{N_n}(t) &= \frac{t}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{t^{k+1}}{2^{n-1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}} \quad \text{en posant } \tilde{k} = k+1 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}}.}$$

15. Soit  $n \geq 2$ . Par la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^n t^k \mathbb{P}(N_n = k).$$

Posons  $P = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{2^{n-1}} \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $Q = \sum_{k=1}^n X^k \mathbb{P}(N_n = k)$ . On observe que  $P$  et  $Q$  coïncident sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $P - Q$  admet une infinité de racines et donc  $P - Q = 0$  i.e.  $P = Q$  ou encore

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{X^k}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^n X^k \mathbb{P}(N_n = k).$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on conclut que

$$\boxed{N_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(N_n = k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

16. Soit  $k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$ . Avec la convention  $\binom{n-1}{n} = \binom{n-1}{-1} = 0$ , on a par la question précédente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k-1) &= \frac{1}{2} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \binom{n-1}{k-2} \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^n} \left( \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} \right). \end{aligned}$$

Par la formule de Pascal,

$$\frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k-1) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k-1}.$$

Or par la question précédente, on a  $\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k-1}$ . Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k-1).}$$

17. La variable aléatoire  $N_n$  compte finalement le nombre de fois où la pièce a changé de face. **Dans le cas d'une pièce équilibrée**, et uniquement dans ce cas là, la probabilité de changer de face ne dépend pas de la face obtenue précédemment. Autrement dit, en notant  $\xi_k$ , pour  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ , la variable aléatoire retournant 1 si l'on change de face ( $X_k = X_{k-1}$ ) et 0 sinon, on obtient des variables  $\xi_k$  de même loi de Bernoulli,  $\xi_k \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$  et de plus indépendantes! Ainsi  $\xi_2 + \dots + \xi_n \sim \mathcal{B}(n-1, \frac{1}{2})$ . Or on observe que  $N_n = 1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ . Donc  $N_n(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$  et on retrouve bien dans ce raisonnement que pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n = k) &= \mathbb{P}(1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = k) \\ &= \mathbb{P}(\xi_2 + \dots + \xi_n = k-1) \\ &= \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2^{n-1-(k-1)}} \\ &= \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$