Programme de colles 08
Analyse asymptotique, Ensembles, Applications

Semaine du 19 janvier au 23 février

Analyse asymptotique

Identique au programme 7 :

1. Négligeabilité : définition par la limite du quotient. Notation $\ll$ ou o. Nouvelles croissances usuelles.
2. Propriétés algébriques des o : transitivité, somme, produit, absorption des constantes, inverse.
3. Equivalence : définition par la limite du quotient. Lien avec o.
4. Deux équivalents ont même nature (convergence ou divergence), même limite (lorsqu'elle existe) et même signe (lorsqu'il est fixe).
5. Théorème d'encadrement des équivalents.
6. Opérations algébriques sur les équivalents : produit, élévation à une puissance fixe, passage à l'inverse notamment, passage à la valeur absolue. Changement de variables. Equivalents usuels.
   Anti-proposition : interdit de sommer, de composer les équivalents, d'écrire équivalent à 0.
7. Développements limités en 0, en x_0. Unicité, troncature. Cas des fonctions paires ou impaires en 0.
8. DL et continuité/dérivabilité. Toute fonction $\mathscr{C}^n$ admet un DL d'ordre n.
9. DL usuels : e^x, cos, sin, tan (à l'ordre 5), ch, sh, arctan, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$.
10. Somme, produit, composée et quotient de DL.
11. Primitivation des développements limités. Théorème de Taylor-Young.
12. Application : recherche de limites, d'asymptote, de tangente, position par rapport à la tangente au voisinage.
13. Rapide complément sur la domination.

Ensembles et applications

1. **Ensembles :** A partir de l'appartenance, définition de l'inclusion et de l'égalité de deux ensembles. L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. Définition d'une partie d'un ensemble E et de l'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$.
3. Intersection et union : définition, commutativité, associativité. Ensembles disjoints.
4. Complémentaire $\overline{A}$, différence de deux ensembles. Propriétés (lois de Morgan...).
5. Produit cartésien d'ensembles.
6. **Applications :** définition, image, antécédent, graphe.
7. Application identité, fonctions indicatrices.
8. Composition, restriction, prolongement.
9. Image directe, image réciproque. Image directe et réciproque de l'union, de l'intersection.
10. Injection, surjection, bijection.

Questions de cours

On demandera à chaque étudiant de réciter un développement usuel (e^x, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $(1+x)^\alpha$, $\arctan(x)$) à un ordre autour de 4 ou 5 puis une question de cours et une démonstration.

1. Enoncer la proposition reliant l'équivalence et la négligeabilité entre deux fonctions (Prop II.3).
2. Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique ? (Prop II.4)
3. Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
4. Enoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
5. Donner une condition nécessaire à l'existence d'un développement limité à l'ordre n. Préciser le cas $n=0$ et $n=1$.

6. Enoncer l'unicité du développement limité.
7. Enoncer la propriété permettant de primitiver un développement limité.
8. Enoncer la formule de Taylor-Young.
9. Enoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
10. Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
11. Définir l'injectivité et la surjectivité.
12. Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse (Prop II.16).

Démonstrations de cours

1. Déterminer la tangente du graphe de $f : x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ et la position relative de cette tangente par rapport au graphe de f.
2. Démontrer les deux assertions suivantes :
   (a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
   (b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.
3. Démontrer les deux assertions suivantes :
   (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Les réponses du cours

1. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x)).$$

2. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.
   (a) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors f et g ont le même comportement en a : si f converge, g aussi et si f diverge, g aussi. De plus dans tous les cas f et g ont le même signe au voisinage de a.
   (b) Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell.$$

3. Sur les équivalents, il est possible de
   - multiplier,
   - d'élever à la puissance (éventuellement négative et donc de passer à l'inverse),
   - de passer à la valeur absolue,
   - de faire un changement de variable.

   Il est cependant interdit
   - de sommer des équivalents,
   - de composer des équivalents par une fonction,
   - d'écrire équivalent à 0.
4. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $(f, g, h) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^3$ tels que

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x).$$

   Alors, par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x).$$

5. Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.
   (a) f est continue en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0. Dans ce cas $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + o(1)$.
   (b) f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Dans ce case, $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$.
   (c) **SI** f est $\mathscr{C}^n$ **ALORS** f admet un développement limité à l'ordre n.
6. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

   Alors, pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k = b_k$.
7. Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n), \qquad (a_k)_{k \in [\![0\,; n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

   Soit F une primitive de f sur I alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$F(x) \underset{x \to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

8. Soit $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ en a alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par
$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$
9. Soient E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Alors,
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
10. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Alors,
$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$
11. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.
$$\begin{array}{rcl} f \text{ est injective} & \Leftrightarrow & \forall (x,y) \in E^2,\ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y). \\ f \text{ est surjective} & \Leftrightarrow & \forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad y = f(x). \end{array}$$
12. Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que
$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Déterminer la tangente du graphe de $f : x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ et la position relative de cette tangente par rapport au graphe de f.

Démonstration. On sait que $\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. Dès lors,
$$1 + \mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{=} 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \underset{x \to 0}{=} 2\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right).$$
Ainsi,
$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)}.$$
Posons $u(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

- on a
$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x \to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x \to 0}{=} \begin{array}{lll} \frac{x^2}{4} & + \frac{x^3}{8} & + o\left(x^3\right) \\ & + \frac{x^3}{8} & + o\left(x^3\right) \\ & & + o\left(x^3\right) \end{array} \\ &\underset{x \to 0}{=} \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$
- Puis,
$$\begin{aligned} u(x)^3 \underset{x \to 0}{=} u(x)u(x)^2 &\underset{x \to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x \to 0}{=} \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

- Enfin,
$$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^3}{8}+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+o\left(u^3\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+u(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{1}{2}\Big(1-\tfrac{x}{2} \quad -\tfrac{x^2}{4} \quad -\tfrac{x^3}{12} \quad +o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\qquad +\tfrac{x^2}{4} \quad +\tfrac{x^3}{4} \quad +o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\tfrac{x^3}{8} \quad +o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^3\right)\Big). \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{-2+6-3}{24}x^3+o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^3}{48}+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, la droite d'équation $y=\frac{1}{2}-\frac{x}{8}$ est la tangente de f en 0. De plus,

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{8}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{48}+o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{48}.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré et $\forall x \geqslant 0$, $\frac{x^3}{48} \geqslant 0$ et $\forall x \leqslant 0$, $\frac{x^3}{48} \leqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente en } 0^+ \text{ et en dessous en } 0^-.}$$

□

Proposition (démo 2)

Soient E, F, G trois ensembles, $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$.

1. $g\circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
2. $g\circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

Démonstration.

1. Supposons $g\circ f$ injective i.e. $\forall (x,y)\in E^2$, $g\circ f(x)=g\circ f(y) \Rightarrow x=y$. Montrons que f est injective. Soient $(x,y)\in E^2$. Montrons que $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$. Supposons $f(x)=f(y)$. Alors, $g(f(x))=g(f(y))$. Donc $g\circ f(x)=g\circ f(y)$. Or $g\circ f$ est injective. Donc $x=y$. Conclusion, $\forall (x,y)\in E^2$, $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ et $\boxed{f \text{ est bien injective}}$.
2. Supposons $g\circ f$ surjective i.e. $\forall z\in G$, $\exists x\in E$, $z=g\circ f(x)$. Montrons que g est surjective. Soit $z\in G$. Par la surjectivité de $g\circ f$, il existe $x\in E$ tel que $z=g\circ f(x)=g(f(x))$. Posons $y=f(x)\in F$, alors on a $z=g(y)$. Dès lors, $\forall z\in G$, il existe $y\in F$ tel que $z=g(y)$. Conclusion, $\boxed{g \text{ est surjective}}$.

□

Proposition (démo 3)

Soient E et F deux ensembles et $f\in\mathscr{F}(E,F)$.

1. Soient $(A,B)\in\mathscr{P}(F)^2$, alors $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.
2. Soient $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$, alors $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

Démonstration.

1. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrons $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) \quad & \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cap B \\ & \Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ ET } f(x) \in B \\ & \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ ET } x \in f^{-1}(B) \\ & \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).}$$

2. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in F$. On a

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \\ & \Leftrightarrow \quad (\exists x_1 \in A,\ y = f(x_1)) \text{ OU } (\exists x_2 \in B,\ y = f(x_2)) \\ & \Leftrightarrow \quad y \in f(A) \text{ OU } y \in f(B) \\ & \Leftrightarrow \quad y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).}$$

□