Programme de colles 06
Equations différentielles d'ordre 2, calculs dans $\mathbb{R}$

Quinzaine du 8 au 19 décembre

Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

1. Equations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants $ay'' + by' + cy = d(x)$, équation homogène associée.
2. Stabilité de l'ensemble des solutions de l'équation homogène par combinaisons linéaires.
3. Equation caractéristique associée.
4. Ensemble des solutions complexes de l'équation homogène.
5. Ensemble des solution réelles de l'équation homogène.
6. Structure de l'ensemble des solutions de l'équation non homogène $\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0$, avec y_p une solution.
7. Principe de superposition.
8. Recherche de la solution particulière lorsque le second membre est du type $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ où $P(x)$ est un polynôme, ou lorsque le second membre est trigonométrique.
9. Problème de Cauchy. Unicité et existence de la solution (admis).

Calcul dans $\mathbb{R}$

1. Définition des ensembles de base $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
2. Propriétés élémentaires de la relation d'ordre $\leqslant$ compatibilité avec $+$, $\times$, le passage à l'inverse, le carré.
3. Définition du majorant, minorant, partie majorée, minorée, bornée.
4. Définition du maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.
5. Théorème (admis) : toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Caractérisation de la borne supérieure. De même pour la borne inférieure. *Pas d'exercice trop théorique !*
6. Définition d'un intervalle et classification des intervalles.
7. Propriété d'Archimède, définition de la partie entière, graphe et propriétés élémentaires.
8. Valeur absolue, graphe et propriétés élémentaires.
9. Distance entre deux réels, inégalité triangulaire.
10. Résolutions d'équations, d'inéquations avec valeur absolue et/ou racine carrée.
11. Résolution de systèmes linéaires (aucun exo avec paramètre n'a été traité en classe) par la méthode du pivot de Gauss.

Questions de cours

1. Enoncer le principe de superposition à l'ordre 2.
2. Enoncer la définition et propriété d'un problème de Cauchy à l'ordre 2.
3. Donner la définition d'une partie majorée, minorée, bornée.
4. Caractériser avec la valeur absolue le fait qu'une partie soit bornée.
5. Donner la définition d'un maximum, d'un minimum d'une partie.
6. Donner la définition de la borne supérieure, de la borne inférieure.
7. Donner une condition suffisante à l'existence de la borne supérieure, inférieure.
8. Donner la définition d'un intervalle.
9. Définir la partie entière.
10. Traduire le fait que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstrations de cours

1. Déterminer une solution de l'équation (E) : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^{t}$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 y''(x) + 7xy'(x) + 9y(x) = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (I) : $|x+2| + |3x-1| \leqslant 4$.

Les réponses du cours

1. Soient $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $d_1 : I\to\mathbb{K}$ et $d_2 : I\to\mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I et (E_1), (E_2) et (E) les équations suivantes :

$$\begin{array}{cl}(E_1) & \forall x\in I,\quad ay''(x)+by'(x)+cy(x)=d_1(x)\\ (E_2) & \forall x\in I,\quad ay''(x)+by'(x)+cy(x)=d_2(x)\\ (E) & \forall x\in I,\quad ay''(x)+by'(x)+cy(x)=d_1(x)+d_2(x).\end{array}$$

Si y_1 est une solution de (E_1) et si y_2 est une solution de (E_2) alors y_1+y_2 est une solution de (E).

2. Soient $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$, $a\neq 0$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $d : I\to\mathbb{K}$ une fonction continue sur I, $t_0\in I$ et $(y_0,y_1)\in\mathbb{K}^2$. Alors le problème de Cauchy

$$(\mathscr{P})\ :\ \begin{cases}(E) & \forall t\in I,\quad ay''(t)+by'(t)+cy(t)=d(t)\\ y(t_0)=y_0 \text{ et } y'(t_0)=y_1\end{cases}$$

admet une unique solution.

3. Soit $A\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{array}{rcl}A \text{ est majorée} & \Leftrightarrow & \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\quad x\leqslant M\\ A \text{ est minorée} & \Leftrightarrow & \exists m\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\quad m\leqslant x\\ A \text{ est bornée} & \Leftrightarrow & \exists\,(M,m)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in A,\quad m\leqslant x\leqslant M.\end{array}$$

4. Soit $A\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :

$$A \text{ est bornée} \quad\Leftrightarrow\quad \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\quad |x|\leqslant M.$$

5. Soient $A\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $(m,M)\in\mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{array}{rcccc}m=\min(A) & \Leftrightarrow & m\in A & \text{et} & \forall x\in A,\quad m\leqslant x\\ M=\max(A) & \Leftrightarrow & M\in A & \text{et} & \forall x\in A,\quad x\leqslant M.\end{array}$$

6. Soit $A\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\sup(A)=\min\{M\in\mathbb{R}\mid M \text{ majore } A\}$$
$$\inf(A)=\max\{m\in\mathbb{R}\mid m \text{ minore } A\}.$$

7. Soit $A\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Si A est non vide et minorée alors A admet une borne inférieure.
Si A est non vide et majorée alors A admet une borne supérieure.

8. Soit $I\in\mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\,(a,b)\in I^2,\qquad [a;b]\subseteq I.$$

9. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ il existe un unique entier $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n\leqslant x<n+1$. Cet entier n est appelé partie entière de x : $n=\lfloor x\rfloor$.

10. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<y,\ \exists r\in\mathbb{Q},\quad x<r<y.$$

De même l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<y,\ \exists\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\quad x<\alpha<y.$$

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Déterminons une solution de l'équation $(E) : \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^t$.

Démonstration. L'équation caractéristique associée à (E) est

$$(E_c)\ : r^2 - 4r + 3 = 0,$$

dont les solutions sont $r = 1$ et $r = 3$ (pour que la somme fasse 4 et le produit 3). Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = 2t+1$ et $m = 1$. On observe que P est de degré 1, soit donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) = at + b$. De plus, m est une racine simple de (E_c). On pose donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = tQ(t)\,\mathrm{e}^{mt} = t\,(at+b)\,\mathrm{e}^t = \left(at^2 + bt\right)\mathrm{e}^t .$$

La fonction y_p est deux fois dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= \left(2at + b + at^2 + bt\right)\mathrm{e}^t = \left(at^2 + (2a+b)\,t + b\right)\mathrm{e}^t \\ y_p''(t) &= \left(2at + 2a + b + at^2 + (2a+b)\,t + b\right)\mathrm{e}^t = \left(at^2 + (4a+b)\,t + 2a + 2b\right)\mathrm{e}^t . \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} & y_p \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall t \in \mathbb{R},\ \left(at^2 + (4a+b)\,t + 2a + 2b\right)\mathrm{e}^t - 4\left(at^2 + (2a+b)\,t + b\right)\mathrm{e}^t + 3\left(at^2 + bt\right)\mathrm{e}^t = (2t+1)\,\mathrm{e}^t \\ \Leftrightarrow\quad & \forall t \in \mathbb{R},\ (a - 4a + 3a)\,t^2 + (4a + b - 8a - 4b + 3b)\,t + 2a + 2b - 4b = 2t + 1 \quad \text{car } \mathrm{e}^t \neq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (-4a)\,t + 2a - 2b = 2t + 1. \end{aligned}$$

On note qu'il suffit de prendre $a = -\frac{1}{2}$ et $2a - 2b = 1$ i.e. $b = \frac{2a-1}{2} = -1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } y_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left(-\dfrac{t^2}{2} - t\right)\mathrm{e}^t \end{array} \text{ est une solution de } (E).}$$

□

Proposition (démo 2)

Déterminer l'ensemble des solutions de $(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2 y''(x) + 7xy'(x) + 9y(x) = 0$.

Démonstration. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x = \mathrm{e}^t$ i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t = \ln(x)$ car quand t décrit $\mathbb{R}$, x décrit $\mathbb{R}_+^*$. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right).$$

Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t > 0$, par composée, la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{cases} y(x) = z\left(\ln(x)\right) \\ y'(x) = \frac{1}{x} z'\left(\ln(x)\right) \\ y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'\left(\ln(x)\right) + \frac{1}{x^2} z''\left(\ln(x)\right). \end{cases}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \quad \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2\left(-\frac{1}{x^2} z'\left(\ln(x)\right) + \frac{1}{x^2} z''\left(\ln(x)\right)\right) + 7x\frac{1}{x} z'\left(\ln(x)\right) + 9z\left(\ln(x)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad -z'\left(\ln(x)\right) + z''\left(\ln(x)\right) + 7z'\left(\ln(x)\right) + 9z\left(\ln(x)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z''\left(\ln(x)\right) + 6z'\left(\ln(x)\right) + 9z\left(\ln(x)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + 6z'(t) + 9z(t) = 0 \quad (F). \end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée est $(F_c) : r^2 + 6r + 9 \Leftrightarrow (r+3)^2 = 0$ et admet donc une unique racine double $r = -3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{-3t} \\ \Leftrightarrow \quad & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = z\left(\ln(x)\right) = (A\ln(x) + B)\,\mathrm{e}^{-3\ln(x)} = \frac{A\ln(x) + B}{x^3}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{A\ln(x)+B}{x^3} \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{x^3} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^3} \end{array} \right).}$$

□

Proposition (démo 3)

Déterminer l'ensemble des solutions de $(I) : |x+2| + |3x-1| \leqslant 4$.

Démonstration. On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		-x-2	0	x+2		x+2	
$3x-1$		1-3x		1-3x	0	3x-1	

Premier cas, $x \leqslant -2$. Alors,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad -x - 2 + 1 - 3x \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad -4x - 1 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leqslant 4x \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -\frac{5}{4}.$$

Or $-\frac{5}{4} \geqslant -\frac{8}{4} = -2$. Donc $\mathscr{S}_1 = \emptyset$.
Deuxième cas, $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$. Alors,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 + 1 - 3x \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 3 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Or $-\frac{1}{2} \in \left[-2; \frac{1}{3}\right]$, donc $\mathscr{S}_2 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.
Troisième cas, $x \geqslant \frac{1}{3}$. Alors,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 + 3x - 1 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 1 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{3}{4}.$$

Or $\frac{3}{4} \geqslant \frac{1}{3}$. Donc $\mathscr{S}_3 = \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right]$.
Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right].}$$

□