Programme de colles 04
Fonctions usuelles et équations complexes

Quinzaine du 10 au 21 novembre

Fonctions usuelles

1. Le logarithme népérien (comme étant la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$). Continuité, dérivation, monotonie. Propriétés algébriques. Limite aux bornes, graphe, $\ln(1+x) \leqslant x$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
2. La fonction exponentielle (comme réciproque de la fonction logarithme). Continuité, dérivation, propriétés algébriques, graphes, limites aux bornes, $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.
3. Les fonctions exponentielle et logarithme en base a.
4. Les fonctions puissances, dérivation, propriétés algébriques.
5. Croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty} x^a \ln^b(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{bx}}{x^a}$, $\lim_{x\to 0, x>0} x^a |\ln(x)|^b$, $\lim_{x\to-\infty} |x|^a \,\mathrm{e}^{-x}$.
6. Les fonctions hyperboliques, définition, dérivée, parité, monotonie, tangente en 0, graphe, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$. Limites aux bornes, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{ch}(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$.
7. Les fonctions circulaires réciproques : arcsinus, arccosinus, arctan, définition, parité (ou non), dérivation, limites aux bornes, asymptotes, tangentes en 0, graphes.

Equations et géométrie complexes

8. Exponentielle complexe, propriétés.
9. Racines carrées d'un complexe, existence d'exactement deux racines pour tout complexe non nul. Détermination directe par la forme polaire et/ou par le calcul sous la forme algébrique.
10. Equations complexes du second degré. Discriminant complexe et expression des racines. Relations racines-coefficients : $s = z_1 + z_2 = -b/a$ et $p = z_1 z_2 = c/a$.
11. Racines n-ièmes de l'unité. Stabilité par produit et inverse/conjugué. Expression des racines n-ièmes. Somme des racines et factorisation de $z^n - 1$.
12. Racines n-ièmes d'un complexe z. Expression à partir de la forme polaire de z. Détermination des racines n-ièmes de z à partir d'une.
13. Caractérisation par les affixes de la colinéarité/alignement, de l'orthogonalité.
14. Translation, rotation, homothétie. Définitions géométriques et applications complexes associées.

Questions de cours

1. Tracer le graphe de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique /arccosinus / arcsinus / arctan, y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.
2. Enoncer la croissance comparée du logarithme en $+\infty$/en 0, de l'exponentielle en $-\infty$/en $+\infty$.
3. Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique / arccosinus / arcsinus / arctan.
4. Enoncer la formule reliant les carrés des fonctions hyperboliques et celle sur arctan.
5. Enoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
6. Donner les racines d'un trinôme. On veillera à bien définir toutes les quantités.
7. Enoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
8. Définir l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Que dire du produit de deux racines n-ième de l'unité ? de l'inverse d'une racine n-ième de l'unité ? de son conjugué ?

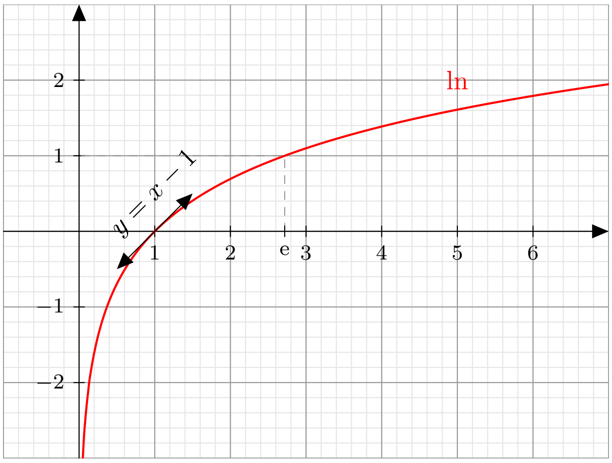
9. Caractériser l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
10. Définir j. Que vaut j^2 ? j^3 ? $1 + j + j^2$?
11. Caractériser les racines n-ièmes de l'unité par une somme.
12. Enoncer la propriété donnant les racines n-ièmes d'un complexe quelconque.

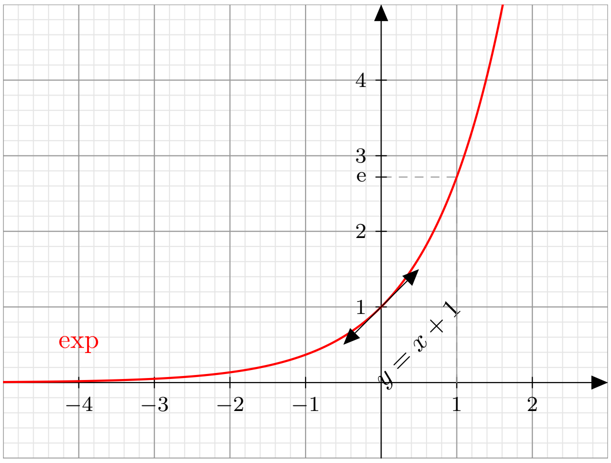
Démonstrations de cours

1. Justifier la dérivabilité de la fonction arcsin et calculer sa dérivée.
2. Enoncer et démontrer la relation entre $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Démonstration de l'écriture polaire des racines n-ièmes de l'unité.

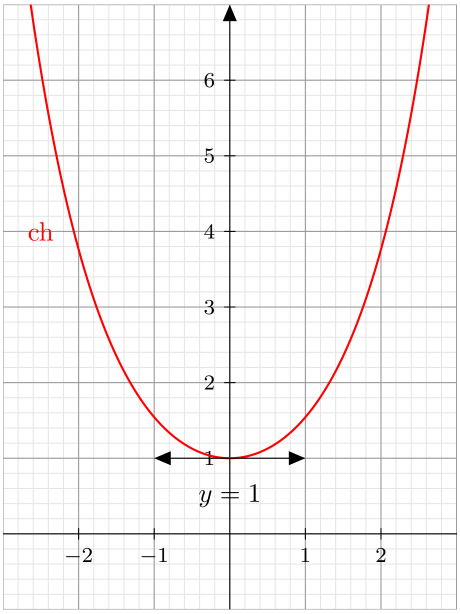
Les réponses de cours

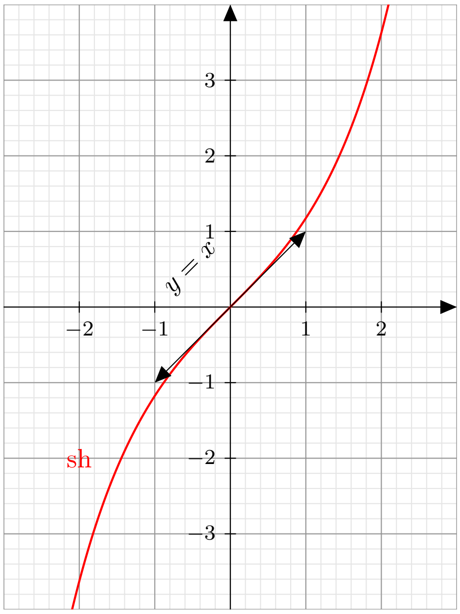
1. Les fonctions logarithme et exponentielle :



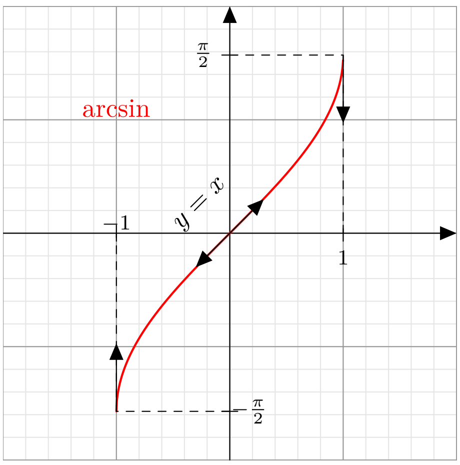


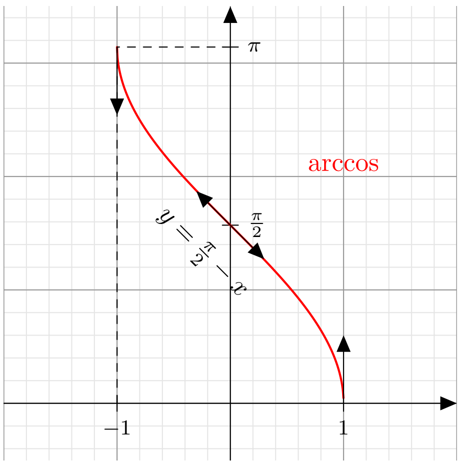
Les fonctions hyperboliques :

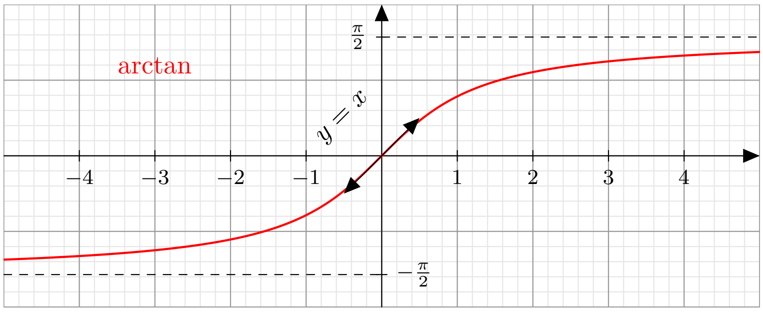




Les fonctions circulaires réciproques :







2.
   - Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a
   $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^b \left|\ln(x)\right|^a = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$
   - Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a
   $$\lim_{x \to -\infty} |x|^b \, \mathrm{e}^{ax} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty.$$
3.
   - La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
   - La fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
   - La fonction cosinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.
   - La fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
   - La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   - La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   - La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
4. On a les relations suivantes :
   - $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
   - $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$
5. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnu $\omega \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions données par :
   $$\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = -\,\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}.$$
6. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Si $\Delta = 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
   - Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet exactement deux solutions données par
   $$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$
   où δ est UNE racine carrée de Δ.
7. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement confondues) de $az^2 + bz + c$. Alors,
   $$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
   $$\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}.$$
   De plus, pour tout $(z,z') \in \mathbb{U}_n$, on a
   $$zz' \in \mathbb{U}_n, \qquad \frac{1}{z} = \overline{z} \in \mathbb{U}_n.$$
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a l'égalité suivante :
   $$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0;n-1]\!] \right\}.$$

10. On a $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. De plus,
$$j^2 = \bar{j}, \qquad j^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad 1 + j + j^2 = 0.$$
11. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0.$$
12. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, on a
$$\omega^n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \omega = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

La fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et
$$\forall x \in \,]-1;1[\,, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Soit $f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[& \to &]-1;1[\\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$ la restriction de la fonction sinus sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $]-1;1[$. La fonction f est bien définie car la fonction sinus est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right) = \,]-1;1[$. On observe alors les points suivants :

- La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ car la fonction sinus l'est.
- La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ car la fonction sinus l'est.
- Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,
$$f'(x) = \sin'(x) = \cos(x) \neq 0.$$

Donc par le théorème de la dérivabilité de la réciproque, la fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$. Soit $x \in \,]-1;1[$, on a
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{f' \circ \arcsin(x)} = \frac{1}{\cos\left(\arcsin(x)\right)}.$$
Or,
$$\cos^2\left(\arcsin(x)\right) = 1 - \sin^2\left(\arcsin(x)\right) = 1 - x^2.$$
Et puisque $\arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\arcsin(x)\right) > 0$. Ainsi,
$$\cos\left(\arcsin(x)\right) = +\sqrt{1-x^2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la fonction arcsin est dérivable sur }]-1;1[\text{ et pour tout } x \in \,]-1;1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$
□

Proposition (démo 2)

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. Posons $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction arctangente l'est sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)' \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Dès lors, puisque $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle,

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(x) = C.$$

En particulier,

$$g(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = C.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

Rappel, par imparité, on a aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

□

Proposition (démo 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est donné par :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$. Observons que $0^n = 0 \neq 1$ donc $0 \notin \mathbb{U}_n$. Fixons donc $\omega \in \mathbb{C}^*$. Alors, il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0; 2\pi[$ tel que $\omega = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega \in \mathbb{U}_n \quad &\Leftrightarrow \quad \omega^n = \left(r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\right)^n = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad r^n\,\mathrm{e}^{in\,\theta} = 1 = 1 \times \mathrm{e}^{i0} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n\,\theta = 2k\pi \end{cases} && \text{par la pseudo-unicité de la forme trigonométrique} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{n}. \end{cases} && \text{car l'équation } x^n = 1 \text{ n'admet qu'une seule solution dans } \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Or, par construction, $\theta \in [0; 2\pi[$ et de plus pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$0 \leqslant \frac{2k\pi}{n} < 2\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant k < n \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \qquad \textit{car } (k, n) \in \mathbb{Z}^2.$$

Ainsi,

$$\omega \in \mathbb{U}_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in [\![0; n-1]\!],\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0; n-1]\!],\ \omega = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0; n-1]\!] \right\}.}$$

□