Programme de colles 03
Nombres complexes et Calcul algébrique

Quinzaine du 13 octobre au 07 novembre

Nombres complexes

1. Nombres complexes, propriétés élémentaires, partie réelle, imaginaire.
2. Représentation graphique, plan complexe, affixe d'un point, d'un vecteur.
3. Conjugaison, propriétés, interprétation graphique. Caractérisation des réels, des imaginaires purs par la conjugaison.
4. Module d'un complexe, propriétés, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.
5. Module au carré d'une somme, inégalité triangulaire (inférieure et supérieure).
6. Complexes de module 1, stabilité par produit, inverse/conjugué.
7. Définition de l'exponentielle complexe sur les imaginaires purs uniquement, propriétés. Formules d'Euler, formule de Moivre. Les étudiants doivent être capable de factoriser une somme d'exponentielles par l'angle moitié.
8. Argument d'un nombre complexe, forme polaire/trigonométrique, « unicité » de l'écriture. Propriétés de l'argument. Interprétation graphique avec l'angle entre deux vecteurs.

NB : les équations complexes et les racines n-ièmes feront l'objet d'un autre chapitre. L'interprétation graphique des notions de bases doivent être comprises mais nous n'avons pas traité d'exercice de géométrie complexe.

Calcul algébrique

1. Notations $\sum$ et $\prod$ et manipulations.
2. Formule de changement d'indice du type glissement $\tilde{k} = k + r$ ou inversion $\tilde{k} = n - k$.
3. Somme et produit télescopique. Sommation par paquets, somme des pairs/impairs.
4. Sommes usuelles : d'une constante, $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
5. Rappels sur les suites arithmétiques et les suites géométriques. Somme d'une suite géométrique.
6. Factorisation de $a^n - b^n$ (formule de Bernoulli).
7. Définition de factorielle n et du coefficient binomial.
8. Formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, formule de Pascal, formule du binôme de Newton.
9. Sommes doubles : indexées par un rectangle, par un triangle.

Questions de cours

1. Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire et le module en fonction du conjugué.
2. Enoncer la formule donnant le carré du module d'une somme.
3. Enoncer les inégalités triangulaires.
4. Enoncer les formules d'Euler.
5. Enoncer la formule de Moivre.
6. Donner la somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.
7. Donner la somme géométrique.
8. Enoncer la formule de Bernoulli.
9. Enoncer la formule du binôme de Newton.
10. Définir le coefficient binomial.
11. Enoncer la formule de Pascal.

Démonstrations de cours

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points du plan complexe $M(z)$ tel que l'affixe z vérifie $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j$.

Les réponses du cours

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \qquad \text{et} \qquad |z|^2 = z\overline{z}.$$
2. Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2.$$
3. Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a
$$||z|-|z'|| \leqslant |z+z'| \leqslant |z| + |z'|.$$
4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$
5. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$
7. Soient $q \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$. On a
$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$
8. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}.$$
9. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
10. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$.
$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \in [\![0;n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
11. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

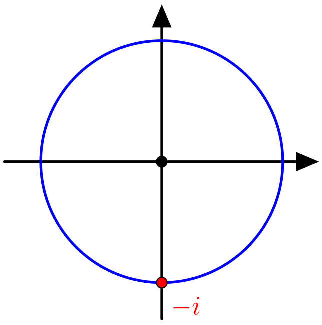
Déterminons $\mathscr{E} = \left\{ M(z) \in \mathscr{P} \;\middle|\; \frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \right\}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $1 - iz \neq 0 \Leftrightarrow iz \neq 1 \Leftrightarrow z \neq \frac{1}{i} = -i$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in \mathscr{E} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{z-i}{1-iz} = \overline{\left(\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}\right)} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{z-i}{1-iz} == \frac{\overline{z}+i}{1+i\overline{z}} \\
& \Leftrightarrow \quad (z-i)(1+i\overline{z}) = (\overline{z}+i)(1-iz) \qquad \text{car } z \neq -i \\
& \Leftrightarrow \quad z + iz\overline{z} - i + \overline{z} = \overline{z} - iz\overline{z} + i + z \\
& \Leftrightarrow \quad 2iz\overline{z} = 2i \\
& \Leftrightarrow \quad z\overline{z} = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad |z|^2 = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad |z| = 1 \qquad \text{car } |z| \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est le cercle de centre } O\,(0,0) \text{ et de rayon 1 privé du point } A(-i) \text{ de coordonnées } (0,-1).}$$



□

Proposition (démo 2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\tilde{k} = n - k$ i.e. $k = n - \tilde{k}$. Si $k = 0$, alors $\tilde{k} = n$ et si $k = n$, alors $\tilde{k} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{\tilde{k}=0}^{n} (n-\tilde{k}) \binom{n}{n-\tilde{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{n-k} \qquad \text{car la variable est muette} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k} \qquad \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \\
&= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\
&= n\,(1+1)^n - S_n \qquad \text{car on reconnait un binôme de Newton} \\
&= n2^n - S_n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$2S_n = n2^n \qquad \Leftrightarrow \qquad S_n = n2^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = n2^{n-1}.}$$

□

Proposition (démo 3)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculons $S_n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^j$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la somme est triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} 2^j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(2^i \frac{2^{n-i+1}-1}{2-1} \right) && \text{car on reconnait une somme géométrique} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(2^{n+1} - 2^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} 2^i \\
&= 2^{n+1}(n+1) - \frac{2^{n+1}-1}{2-1} && \text{car on reconnait une somme géométrique} \\
&= (n+1)\, 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 \\
&= n2^{n+1} + 1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = n2^{n+1} + 1.}$$

□