Programme de colles 14
Représentation matricielle et couple de VA

Quinzaine du 01 au 12 juin

Représentation matricielle des applications linéaires

1. Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base. Notation $\text{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$. Matrice d'une application linéaire dans deux bases $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$. Notation $\text{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$, $\text{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$
2. A $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Conséquences : linéarité, unicité de la matrice associée, de l'application linéaire associée lorsque les bases sont données. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$.
3. Cas d'un espace vectoriel avec une base canonique. Matrice/application linéaire canoniquement associée.
4. Formule $Y = AX$ i.e. $\text{mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \text{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\text{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$ traduisant l'évaluation $y = f(x)$.
5. Matrice de la composition. Matrice de f^k.
6. Matrice d'un isomorphisme. Matrice de l'inverse. Une famille est une base si et seulement si sa matrice dans une base est inversible.
7. Matrice de passage. Notation $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \text{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Inverse, composition.
8. Formule $X = PX'$ i.e. $\text{mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\text{mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.
9. Formule de changement de bases $D = P^{-1}AQ$ ou $A = PDQ^{-1}$ i.e.
   $\text{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = P_{\mathscr{B}'_F,\mathscr{B}_F}\text{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$ ou $\text{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}\text{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f)\,P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E}$.
10. Noyau, image, rang d'une matrice (définition avec la dimension de l'image).
11. Conservation du rang par des opérations élémentaires.
12. Théorème du rang et caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par le noyau ou l'image ou le rang.

Couples de variables aléatoires

1. Couple de variables aléatoires réelles. Les $((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ forment un système complet d'évènements (incompatibles), application au calcul $\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B)$.
2. Loi conjointe, marginale, conditionnelle de X sachant $Y = y$ ou Y sachant $X = x$.
3. Indépendance de deux v.a. définition sur les singletons.
   Propriétés $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B)$.
4. Définition d'un n-uplet de variables aléatoires. Indépendance.
5. Espérance, variance, covariance. Théorème de transfert pour une v.a. pour un couple de v.a.
6. Propriété de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
7. Formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + 2ab\text{Cov}(X,Y) + b^2\mathbb{V}(Y)$.
8. Fonction génératrice. La fonction génératrice caractérise la loi. Lien avec l'espérance et la variance.
9. Deux variables indépendantes sont non corrélées et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$. Dans ce cas, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ et $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.
10. Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.
11. Espérances, variances et fonctions génératrices des lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale). Somme de deux lois binomiales indépendantes. Loi de la somme de n variables aléatoires de Bernoulli.

Questions de cours

1. Préciser l'isomorphisme entre les applications linéaires et les matrices. Quelle est la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$?
2. Enoncer la proposition donnant le vecteur image.
3. Donner la matrice d'une composition.
4. Enoncer la caractérisation des bases par la représentation matricielle.
5. Enoncer la proposition donnant la représentation d'un vecteur dans une nouvelle base.
6. Caractériser l'inversibilité d'une matrice.

7. Définir la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$.
8. Définir l'espérance de X, la variance de X (+formule) et la fonction génératrice de X.
9. Enoncer le lien entre la fonction génératrice, l'espérance et la variance.
10. Que dire de l'espérance, la variance et la fonction génératrice de deux variables indépendantes ?
11. Enoncer le théorème de transfert.
12. Enoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
13. Enoncer la propriété sur la somme de deux binomiales.

Démonstrations de cours

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ l'application canoniquement associée à A. On admet que $\mathscr{B} = \left(1 + X^2, 1 + X, 1 + X + X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ par deux méthodes.
2. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ définie pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = \frac{M+M^T}{2}$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déduire l'image et le noyau de f.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre $2/3$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la loi du couple $Z = (X, Y)$, la loi de V, l'espérance et la variance de V.

Les réponses du cours

1. Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, E et F deux espaces vectoriels de dimension p et n respectivement, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Alors, l'application

$$\Phi : \mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$f \mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f),$$

forme un isomorphisme. En particulier $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np$.

2. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $x \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Notons $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x))$. Alors

$$Y = AX.$$

3. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $\mathscr{B}_G$, une base de G, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

4. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors,

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est une matrice inversible.}$$

5. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E et $x \in E$. Notons $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$, $X' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E}(x)$ et $P = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$. Alors

$$X = PX'.$$

6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
   - $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
   - $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
   - $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$
   - $\mathrm{rg}(A) = n$.

7. Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et (X,Y) un couple de variables aléatoires défini sur Ω. Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=y) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ la probabilité suivante :

$$\mathbb{P}_{(Y=y)} : \quad X(\Omega) \to [0;1]$$
$$x \mapsto \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y))}{\mathbb{P}(Y=y)}.$$

8. Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. On note $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_n\}$. On appelle espérance de X le nombre défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

On définit la variance de X le nombre défini par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 \text{ par la formule de Koenig-Huygens.}$$

Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, alors, on définit la fonction génératrice de X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{i=1}^{n} t^{x_i}\mathbb{P}(X = x_i).$$

9. Soient $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$. Alors, sa fonction génératrice G_X vérifie :

$$G_X(1) = 1, \qquad \mathbb{E}(X) = G'_X(1) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

10. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \qquad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) \qquad \text{et} \qquad G_{X+Y} = G_X \times G_Y.$$

11. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i).$$

12. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur Ω. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

13. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $p \in [0;1]$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$ deux variables aléatoires définies sur Ω. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$X + Y \sim \mathscr{B}(n+m, p).$$

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ l'application canoniquement associée à A. On admet que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) = \left(1 + X^2, 1 + X, 1 + X + X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ par deux méthodes.

Démonstration. *Méthode 1.* Posons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $E_1 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ la représentation matricielle de e_1 dans $\mathscr{C}$. On a

$$AE_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = E_1.$$

Dès lors, on en déduit que $f(e_1) = e_1$. De même $E_2 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $E_3 = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(e_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ puis,

$$AE_2 = E_2, \qquad AE_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = E_3 + E_1.$$

Donc $f(e_2) = e_2$ et $f(e_3) = e_1 + e_3$. Conclusion,

$$\boxed{D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Méthode 2. Posons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $P = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$. Alors,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On observe que

$$
\begin{array}{lll}
P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow -L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

On vérifie bien que $PP-1 = I_3$, donc on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dès lors, par la formule de changement de base,

$$
\begin{aligned}
D = P^{-1}AP &= P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Conclusion, on retrouve bien :

$$
\boxed{D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}
$$

□

Proposition (démo 2)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ définie pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = \frac{M+M^T}{2}$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déduire l'image et le noyau de f.

Démonstration. Soit $(E_1, E_2, E_3, E_4) = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
f(E_1) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\
f(E_2) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\\
f(E_3) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\\
f(E_4) &= \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 1/2 & 0\\0 & 1/2 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.}$$

Soit $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad AX = 0_{4,1}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0\\ \frac{b+c}{2} = 0\\ \frac{b+c}{2} = 0\\ d = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = d = 0\\ c = -b\end{cases}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right).$$

D'où,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right).}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(A) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1/2\\1/2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \qquad \text{car } C_3 = C_2 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \qquad C_2 \leftarrow 2C_2.
\end{aligned}$$

Conclusion, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right).}$$

On peut observer que $\operatorname{Ker}(f) = \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ *et* $\operatorname{Im}(f) = \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. *Mieux, on peut montrer que* f *est la projection sur* $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ *parallèlement à* $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$.

□

Proposition (démo3)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre $2/3$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la loi du couple $Z = (X, Y)$, la loi de V, l'espérance et la variance de V.

Démonstration. Puisque $X \sim Y \sim \mathscr{B}(2/3)$ et que X et Y sont indépendantes, alors $U = X + Y \sim \mathscr{B}(2, 2/3)$. Donc son univers image est $U(\Omega) = [\![0; 2]\!]$. D'autre part, puisque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0; 1\}$, on observe que $V(\Omega) = (X - Y)(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$. Donc $Z(\Omega) = [\![0; 2]\!] \times \{-1; 0; 1\}$. Calculons,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = (0, -1)) &= \mathbb{P}(U = 0, V = -1) \\
&= \mathbb{P}(X + Y = 0, X - Y = -1) \\
&= \mathbb{P}(X + Y = 0, -2Y = -1) \qquad C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\
&= \mathbb{P}(X + Y = 0, Y = 1/2) = 0.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = (0, 0)) &= \mathbb{P}(U = 0, V = 0) \\
&= \mathbb{P}(X + Y = 0, X - Y = 0) \\
&= \mathbb{P}(X + Y = 0, -2Y = 0) \qquad C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\
&= \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \\
&= \mathbb{P}(X = 0)\,\mathbb{P}(Y = 0) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right) \qquad \text{car } X \sim Y \sim \mathscr{B}(p) \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

En procédant de même pour les autres valeurs, on obtient :

$U \backslash V$	-1	0	1
0	0	$1/9$	0
1	$2/9$	0	$2/9$
2	0	$4/9$	0

NB : La somme totale fait bien 1.
On a vu que $V(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ De plus, $(U = i)_{i \in \{0,1,2\}}$ forme un système complet d'évènements donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(V = -1) = \mathbb{P}(U = 0, V = -1) + \mathbb{P}(U = 1, V = -1) + \mathbb{P}(U = 2, V = -1).$$

Par le tableau, $\mathbb{P}(V = -1) = 0 + \frac{2}{9} + 0 = \frac{2}{9}$. De même pour les autres valeurs :

j	-1	0	1
$\mathbb{P}(V = j)$	$2/9$	$5/9$	$2/9$

Son espérance est alors donnée par

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{j=-1}^{1} j\mathbb{P}(V = j) = -\frac{2}{9} + 0 \times \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 0.$$

Par la théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\left(V^2\right) = \sum_{j=-1}^{1} j^2\mathbb{P}(V = j) = \frac{2}{9} + 0 + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}.$$

Donc par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(V) = \mathbb{E}\left(V^2\right) - \mathbb{E}(V)^2 = \frac{4}{9}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(V) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(V) = \frac{4}{9}.}$$

□