

Programme de colles 10

Polynômes et Espaces vectoriels

Quinzaine du 9 au 20 mars

Polynômes

1. Définition d'un polynôme, addition, produit, composition. Degré d'un polynôme, de la somme, du produit, de la composition.
2. Polynômes de degré inférieur ou égal à n . Evaluation d'un polynôme en un réel, une matrice, une fonction.
3. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
4. Polynôme dérivée. Dérivée n -ième. Linéarité de la dérivation. Formule de Leibniz.
5. Formule de Taylor pour les polynômes.
6. Divisibilité de P par Q . Division euclidienne de polynômes. Méthode de Horner.
7. Racine d'un polynôme. Caractérisation par la factorisation.
8. Un polynôme ayant plus de racines que son degré est nul.
9. Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation avec les dérivées.
10. Factorisation des polynômes en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
11. Relation entre la somme des racines et les coefficients de P et relation entre le produit des racines et les coefficients de P .

Espaces vectoriels

1. Définition d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Définition d'une combinaison linéaire, d'un sous-espace vectoriel.
3. Caractérisation des sous-espaces vectoriels comme des sous-ensembles contenant 0_E et stables par combinaisons linéaires.
4. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. C'est le plus petit espace vectoriel contenant la famille au sens de l'inclusion. Opérations élémentaires sur la famille sans changer l'espace engendré.
5. Intersection et somme de sous-espaces vectoriels.
6. Espaces en somme directe, espaces supplémentaires. Définition et caractérisation.
7. Familles finies de vecteurs : familles génératrices, libres, liées.
8. Cas des polynômes de degrés distincts.
9. Base d'un espace vectoriel. Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
10. Théorème de la base adaptée.

Le théorème de la base adaptée ne sera vu que lundi, ainsi que les exos sur les espaces supplémentaires et les familles.

Questions de cours

1. Définir le polynôme dérivé.
2. Énoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
3. Énoncer les deux formules de Taylor pour les polynômes.
4. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
5. Définir une racine de multiplicité m .
6. Caractériser la multiplicité à l'aide des dérivées.
7. Définir et caractériser un sous-espace vectoriel.
8. Définir la somme de deux espaces vectoriels.

9. Définir et caractériser deux espaces en somme directe.
10. Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.
11. Définir et caractériser une famille libre.
12. Définir et caractériser une famille liée.
13. Définir une famille génératrice.
14. Définir et caractériser une base.
15. Énoncer le théorème de la base adaptée.

Démonstrations de cours

1. Caractériser la multiplicité d'une racine par les dérivées.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P$.
3. Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Les réponses du cours

1. Soient $n \geq 1$, et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Alors le polynôme dérivé de P est donné par

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

2. Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ donc $\deg(P) \leq n$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \quad \text{et} \quad P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

4. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$

5. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si

$$(X - \alpha)^m \text{ divise } P \quad \text{et} \quad (X - \alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P.$$

6. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a

$$\alpha \text{ racine de } P \text{ de multiplicité } m \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(m)}(\alpha) \neq 0. \end{cases}$$

7. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un ensemble F est un sous-espace vectoriel si et seulement si (par définition) :

- $F \subseteq E$
- F est un espace vectoriel.

si et seulement si (par caractérisation) :

- $F \subseteq E$
- $0_E \in F$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F, \quad \lambda x + \mu y \in F.$

8. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$F + G = \{z \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G, z = x + y\}.$$

9. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si (par définition)

$$\forall (x, x') \in F^2, \forall (y, y') \in G^2, \quad (x + y = x' + y') \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

si et seulement si (par caractérisation) :

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

10. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si (par définition)

$$\forall z \in E, \exists! (x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

si et seulement si (par caractérisation) :

1. $F \cap G = \{0_E\}$.
2. $F + G = E$.
11. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{L}$ est libre si et seulement si
 - Aucun des vecteurs de $\mathcal{L}$ n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{L}$
 - i.e. pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$
12. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{L}$ est liée si et seulement si
 - L'un des vecteurs au moins de $\mathcal{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{L}$
 - i.e. il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, tel que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E.$$
13. Soient E un espace vectoriel non nul et $\mathcal{G}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{G}$ est génératrice dans E si et seulement si $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$.
14. Soient E un espace vectoriel non nul, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si
 - $\mathcal{B}$ est libre et génératrice dans E
 - i.e.

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$
15. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E , $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G . On pose $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$. Alors,
 - $F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est libre.
 - $F + G = E \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est génératrice dans E .
 - $F \oplus G = E \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est une base de E .

Démonstrations de cours

Proposition (démonstration 1)

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Le nombre α est racine de P de multiplicité m si et seulement si

$$P(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Démonstration. On rappelle que

$$\alpha \text{ est une racine de multiplicité } m \text{ de } P \quad \Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - \alpha)^m Q \text{ ET } Q(\alpha) \neq 0.$$

Supposons α de multiplicité m . Alors, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 0; m \rrbracket$, par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} P^{(k)} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [(X - \alpha)^m]^{(i)} Q^{(k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!} (X - \alpha)^{m-i} Q^{(k-i)}. \end{aligned}$$

Dès lors, si $k \leq m-1$, $m-i \geq m-k \geq 1$. Donc $(X - \alpha)^{m-i}$ vaut 0 en α et

$$P^{(k)}(\alpha) = 0.$$

Si $k = m$, $(X - \alpha)^{m-i}$ vaut 0 en α sauf pour $i = k = m$ où il vaut 1. Donc

$$P^{(m)}(\alpha) = \binom{m}{m} \frac{m!}{(m-m)!} 1 \times Q^{(m-m)}(\alpha) = m! Q(\alpha) \neq 0.$$

Réciproquement, supposons que pour tout $k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$. On observe alors que $n = \deg(P) \geq m$. Par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \\ &= \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k \quad \text{car } P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ pour } k \leq m-1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!} (X - \alpha)^{k+m} \\ &= (X - \alpha)^m \underbrace{\sum_{k=0}^{n-m} \frac{P^{(k+m)}(\alpha)}{(k+m)!} (X - \alpha)^k}_{=Q} \end{aligned}$$

De plus,

$$Q(\alpha) = \frac{P^{(m)}(\alpha)}{(m)!} \neq 0.$$

Donc α est une racine de multiplicité m de P .

Conclusion,

$$\alpha \text{ est une racine de multiplicité } m \text{ de } P \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ ET } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

□

Proposition (démonstration 2)

Déterminons dans $\mathbb{R}[X]$ les solutions de l'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P$.

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ est une solution de l'équation. Supposons $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et notons $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$. Si P est une solution de l'équation, alors

$$\begin{aligned} \deg(P(X^2)) &= \deg((X^2 + 1)P) &\Leftrightarrow & 2\deg(P) = \deg(X^2 + 1) + \deg(P) \\ &&\Leftrightarrow & 2n = 2 + n \\ &&\Leftrightarrow & n = 2. \end{aligned}$$

Donc il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$. Encore vrai si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} P(X^2) &= (X^2 + 1)P &\Leftrightarrow & a_0 + a_1X^2 + a_2X^4 = (X^2 + 1)(a_0 + a_1X + a_2X^2) \\ &&\Leftrightarrow & a_0 + a_1X^2 + a_2X^4 = a_0X^2 + a_1X^3 + a_2X^4 + a_0 + a_1X + a_2X^2 \\ &&\Leftrightarrow & a_2X^4 + a_1X^2 + a_0 = a_2X^4 + a_1X^3 + (a_2 + a_0)X^2 + a_1X + a_0. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\begin{cases} a_2 = a_2 \\ 0 = a_1 \\ a_1 = a_2 + a_0 \\ 0 = a_1 \\ a_0 = a_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = -a_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad P = a_2X^2 - a_2 = a_2(X^2 - 1).$$

Conclusion,

$$\mathcal{S} = \{a_2(X^2 - 1) \mid a_2 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^2 - 1).$$

□

Proposition (démonstration 3)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . L'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

- Pour tout $z \in F + G$, il existe $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. Or $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$ donc

$$z = \underbrace{x}_{\in E} + \underbrace{y}_{\in E} \in E \quad \text{car } E \text{ stable par somme.}$$

D'où $F + G \subseteq E$.

- Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(z, z') \in (F + G)^2$. Par définition, il existe $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$ et de même il existe $(x', y') \in F \times G$ tel que $z' = x' + y'$. Donc

$$\begin{aligned} \lambda z + \mu z' &= \lambda(x + y) + \mu(x' + y') \\ &= \underbrace{\lambda x + \mu x'}_{\in F} + \underbrace{\lambda y + \mu y'}_{\in G} \in F + G. \end{aligned}$$

car F sous-espace vectoriel de E car G sous-espace vectoriel de E

Donc $F + G$ est stable par combinaisons linéaires.

Par conséquent, l'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . □