

Colle du 25/11 - Sujet 1
Réduction

Question de cours

1. Définir les éléments propres, l'ordre de multiplicité et comparaison avec la dimension associée.
2. Montrer que si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u est scindé simple sur $\mathbb{K}$, alors...

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le rang de A .
2. Sans calculer le polynôme caractéristique de A , montrer que A est diagonalisable.
3. Diagonaliser A .

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A^2 est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
2. Montrer que le spectre de A est inclus dans un ensemble contenant 4 valeurs que l'on précisera.
3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A , g sa restriction à $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$ et $s = ig$. Reconnaître s et en déduire que $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}) = \text{Ker}(f + i\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - i\text{Id})$.
4. Montrer que f est diagonalisable.

Colle du 25/11 - Sujet 2
Réduction

Question de cours

1. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme en dimension n soit diagonalisable.
2. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que λ est une valeur propre de f si et seulement si...

Exercice 1. Soient $n \geq 2$ et $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A_n et en

déduire si A est diagonalisable ou non.

Exercice 2. Déterminer une matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Colle du 25/11 - Sujet 3
Réduction

Question de cours

1. Définir un endomorphisme diagonalisable, une matrice diagonalisable.
2. Montrer que si x est un vecteur propre de f , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, x est un vecteur propre de...

Exercice 1. Déterminer si $A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 2 \\ 10 & 7 & -2 \\ -10 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et si oui la diagonaliser.

Exercice 2. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = B$.