

Colle du 12/11 - Sujet 1
Séries et éléments propres

Question de cours

1. Définir et donner la convergence d'une série alternée.
2. Démontrer que $\sum z^n$ converge absolument si et seulement si...

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AMB. \end{matrix}$ Déterminer les éléments propres de f .

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto x - \ln(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique réel $u_n \in]0; 1]$ tel que $f(u_n) = n$.
2. Etudier la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Etudier la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

Colle du 12/11 - Sujet 2
Séries et éléments propres

Question de cours

1. Enoncer le théorème de comparaison série-intégrale
2. Montrer que $\sum (a_{n+1} - a_n)$ converge si et seulement si...

Exercice 1. Déterminer la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère Φ_A définie pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\Phi_A(M) = AM$. Montrer que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\Phi_A)$.

Indication : pour $X \in \mathbb{R}^n$, on pourra considérer $M_X = (X, 0, \dots, 0)$ la matrice dont la première colonne est X .

Colle du 12/11 - Sujet 3
Séries et éléments propres

Question de cours

1. Définir, donner la convergence et la somme d'une produit de Cauchy.
2. Si la série $\sum a_n$ converge alors...

Exercice 1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Exercice 2. Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tout $f \in E$, on pose $T(f) : x \mapsto f'(x) - xf(x)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme surjectif.
2. Déterminer les éléments propres de T .