

Colle du 04/11 - Sujet 1
Déterminant et séries

Question de cours

1. Donner la définition de l'application déterminant et ses propriétés.
2. Démontrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ converge absolument si et seulement si

Exercice 1. Calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 1 & c+a & c^2+a^2 \\ 1 & a+b & a^2+b^2 \end{vmatrix}$.

Exercice 2. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{n}}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis un équivalente de u_n quand n tend vers $+\infty$ et enfin la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{u_n}$.

Colle du 04/11 - Sujet 2
Déterminant et séries

Question de cours

1. Donner la définition d'une série alternée et discuter de sa convergence.
2. Démontrer que si $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge alors son terme général...

Exercice 1. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sin^n \left(\frac{2n\pi}{3} \right)$ converge et calculer sa somme.

Colle du 04/11 - Sujet 3
Déterminant et séries

Question de cours

1. Enoncer le théorème de comparaison série/intégrale.
2. Démontrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_{n+1} - a_n)$ converge si et seulement si...

Exercice 1. Montrer que $\sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right)$ converge et déterminer sa somme totale.

Exercice 2. Soit $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^T \end{matrix}$. Montrer que f est une symétrie et calculer son déterminant.