

Colle du 24/02 - Sujet 1
Espace préhilbertien, Variables aléatoires

Question de cours

1. Définition du projeté orthogonal, de la projection orthogonal et propriétés.
2. Démontrer l'expression de la variance d'une somme de variables aléatoires.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On pose A l'évènement « X est pair » et B l'évènement « X est impair ». Comparer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 2. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Colle du 24/02 - Sujet 2
Espace préhilbertien, Variables aléatoires

Question de cours

1. Donner la définition et la modélisation de la loi de Bernoulli, binomiale et géométrique.
2. Montrer que $(X, Y) \mapsto X^T Y$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Soient $p \in]0; 1[$ et X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p . Posons $Y = \frac{(-1)^X}{X}$. Déterminer si Y est d'espérance finie ou non et en cas d'existence, la calculer.

Exercice 2. Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement supplémentaires.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

Colle du 24/02 - Sujet 3
Espace préhilbertien, Variables aléatoires

Question de cours

1. Définir le produit scalaire et la norme associée. Énoncer le théorème de Cauchy-Schwarz.
2. Déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson.

Exercice 1. On lance deux pièces qui ont toutes les deux la même probabilité p de retourner pile. On note X le rang d'apparition du premier pile de la première pièce et Y celui de la seconde pièce. On pose U le rang d'apparition du premier pile toutes pièces confondues et $V = X + Y - U$.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq n)$.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(U \geq n)$ puis $\mathbb{P}(U = n)$. Quelle est la loi de U ?
3. Les variables aléatoires X et U sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi du couple (U, V) .
5. Déterminer la loi de V . Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : M \mapsto \text{tr}(AM)$. Déterminer $\text{Ker}(\varphi_A)^\perp$.