

Colle du 03/02 - Sujet 1
Intégrales à paramètre, espace préhilbertien

Question de cours

1. Définir une fonction intégrable et donner le lien avec la convergence de l'intégrale.
2. Montrer que $(X, Y) \mapsto X^T Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_3 - bJ\|$.

Exercice 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

1. Montrer que f est développable en série entière et préciser son rayon de convergence.
2. Quelle est la parité de f ? Que peut-on en déduire?
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + xf(x) = 1$.
4. Déterminer les solutions développables en séries entières de $(\mathcal{P}) : \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + xy(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
5. Déterminer le développement en série entière de f .
6. En déduire une expression simple de $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Colle du 03/02 - Sujet 2
Intégrales à paramètre, espace préhilbertien

Question de cours

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Montrer que $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Exercice 1. Soit $F = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ a & b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .
2. Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Déterminer $d(M, F)$.

Exercice 2. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2} x}{1+t^2} dt$ et $K = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F et étudier sa continuité.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
4. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par F .
5. En déduire que $\forall x > 0$, $F(x) = 2K e^x \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et en déduire la valeur de K .

Colle du 03/02 - Sujet 3
Intégrales à paramètre, espace préhilbertien

Question de cours

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégral.
2. Montrer que $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Soient $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + 4t = 0 \\ x + 2y + 4z + 6t = 0 \end{cases} \right\}$ et $F^\perp = \{ X \in \mathbb{R}^4 \mid \forall Y \in F, \langle X, Y \rangle = 0 \}$.

1. Déterminer une base de $F^\perp$.
2. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.

Exercice 2. On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx) - \arctan(t)}{t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F .
2. Pour tout $a > 0$, montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$. Que peut-on en déduire ?
3. En déduire l'expression de F sur $\mathbb{R}_+^*$.