

Colle du 16/12 - Sujet 1
Coniques et matrices symétriques**Question de cours**

1. Énoncer le théorème spectral version orthogonal.
2. Donner la définition de l'hyperbole via un paramétrage, donner son lien avec l'équation cartésienne (réduite), son tracé et ses asymptotes.

Exercice 1. Déterminer une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Exercice 2. Soit $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Montrer que f est continue.
2. La fonction f est-elle $\mathcal{C}^1$?

Colle du 16/12 - Sujet 2
Coniques et matrices symétriques**Question de cours**

1. Donner la définition de la dérivée partielle en un point.
2. Démontrer la caractérisation d'une matrice orthogonale avec ses colonnes.

Exercice 1. Déterminer puis tracer la conique d'équation $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4x + 2y = 1$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$, telles que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x^2 \partial_1^2 f(x, y) - y^2 \partial_2^2 f(x, y) = 0.$$

On pourra poser $(u, v) = (xy, \frac{y}{x})$.

Colle du 16/12 - Sujet 3
Coniques et matrices symétriques

Question de cours

1. Donner la définition du vecteur gradient et ses propriétés.
2. Soit A une matrice symétrique réelle. Si X et Y sont deux vecteurs propres associés de A à des valeurs propres distinctes de A , alors...

Exercice 1. La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}$ est-elle prolongeable par continuité ? Si oui son prolongement est-il $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose alors

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}.$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que g admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.