

TD27bis

Déterminant

Exercice 1 Dans chaque cas, montrer que l'opérateur est un produit scalaire.

1. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}^1([-1; 1], \mathbb{R})$, par $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f'(t)g'(t) dt + f(0)g(0)$ est un produit scalaire.
2. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, par $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ est un produit scalaire.
3. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, par $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire.

On pourra en donner une formule en fonction des coefficients de A pour montrer la positivité et la séparation.

4. Soit $\mathcal{B}(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que l'opérateur $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour tout $(u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}) \in (\mathcal{B}(\mathbb{N}^*))^2$, par $\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k v_k}{k^2}$ existe et est un produit scalaire.

Exercice 2 Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$1. \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

1. Trouver une relation de récurrence entre Δ_n , Δ_{n-1} et Δ_{n-2} .
2. En déduire la valeur de Δ_n .

Exercice 4 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Montrer que s'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$, alors n est pair. Donner un exemple pour $n = 2$.

Exercice 5 *Déterminant de Vandermonde.* Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ des scalaires

deux à deux distincts. On note $V_n(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$.

1. On pose $P : x \mapsto V_n(x, a_1, \dots, a_n)$. A l'aide d'un développement par rapport à la première colonne, montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n .
2. Montrer que P admet n racines simples sur \mathbb{K} .
3. En déduire une relation entre V_n et V_{n-1} .
4. Montrer que $V_n(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$. Peut-on étendre ce résultat au cas où deux au moins des a_i seraient égaux ?

Exercice 6

1. Donner le déterminant d'une matrice nilpotente i.e. une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $N^p = O_p$.
2. Soit $E = \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$. Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et donner le déterminant de la dérivation sur E .

Exercice 7 Calculer : $\begin{vmatrix} a & b & a & c \\ b & a & c & a \\ a & c & a & b \\ c & a & b & a \end{vmatrix}$.

Exercice 8 Les réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ étant fixés, on pose pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$D_n(a, b) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{vmatrix} \text{ et } P(X) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + X & a + X & \cdots & a + X \\ b + X & \lambda_2 + X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + X \\ b + X & \cdots & b + X & \lambda_n + X \end{vmatrix}.$$

1. A l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes, montrer que P est un polynôme de degré ≤ 1 .
2. Calculer $D_n(a, b)$ si $a \neq b$.
3. Calculer $D_n(a, a)$ (on admettra que $D_n(a, a) = \lim_{b \rightarrow a} D_n(a, b)$).