

TD 26

Géométrie du plan

Exercice 1 On considère $A(-1, -3)$, $B(2, -2)$ et $C(0, 4)$. Donner dans chaque cas des équations cartésiennes et paramétriques : de la droite d_1 passant par A et B ; de la droite d_2 passant par C et orthogonale à d_1 ; de la droite d_3 passant par C et parallèle à d_1 .

Exercice 2 Soient $A(6, 4)$ et d d'équation $2x - y - 3 = 0$. Déterminer la distance de A à d , puis les coordonnées du projeté orthogonal de A sur d .

Exercice 3 Former les équations cartésiennes (dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé) des bissectrices des deux droites $d_1 : 3x + 4y + 3 = 0$, $d_2 : 12x - 5y + 4 = 0$.

Exercice 4 [Droites parallèles]

1. On considère la droite d de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$
 Déterminer une équation cartésienne de d .
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' parallèle à d et passant par $B(1, 1)$.
3. On considère la famille de droites (Δ_m) avec $\Delta_m : mx + (m - 1)y + 2 = 0$. Déterminer la valeur de m pour laquelle Δ_m est parallèle à d .

Exercice 5 [Equation cartésienne, tangentes à un cercle]

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-2, -1)$ passant par $B(1, 1)$.
2. On considère le cercle \mathcal{C} dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$. Préciser le centre et le rayon de \mathcal{C} .
Déterminer une équation cartésienne des tangentes à \mathcal{C} passant par $A(0, 2)$.
3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on note \mathcal{D}_m la droite d'équation $(1 - m^2)x + 2my = 4m + 2$. Montrer que ces droites sont toutes tangentes à un unique cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 6 Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' les cercles d'équations respectives $x^2 + y^2 = 100$ et $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 200 = 0$.

1. Déterminer le centre et le rayon des cercles.

2. Soit d la droite d'équation $-4x - 3y + 4 = 0$. Déterminer les points d'intersection entre d et chacun des cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' .
3. Montrer que \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont tangents et donner une équation de la tangente commune.

Pour aller plus loin

Exercice 7 Soient A , B et C trois points du plan distincts deux à deux et non alignés.

1. Montrer que : $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$.
2. En déduire que $\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{CA}{\sin(\widehat{CBA})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})}$.

Exercice 8 Soit \mathcal{C} le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ et $A(4, -4)$. On peut mener par le point A deux tangentes au cercle \mathcal{C} . Calculer la distance entre les points d'intersection de ces tangentes et de \mathcal{C} .

Exercice 9 On considère le cercle de centre O et de rayon 1 et le cercle de centre $\Omega(2, 3)$ et de rayon $R > 0$.

1. Déterminer une équation de chacun de ces cercles ainsi qu'une équation de leur axe radical Δ .
2. Calculer la distance de O à Δ et montrer qu'il existe deux valeurs de R pour lesquelles ces cercles sont tangents.
3. Dans chaque cas, calculer les coordonnées des points d'intersection et montrer qu'ils sont alignés avec les centres.

Exercice 10 Pour $m \in \mathbb{R}$, on donne le cercle \mathcal{C}_m d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \frac{9m^2}{2} - m - \frac{1}{2} = 0.$$

Pour $m \neq -1$, calculer le centre et le rayon de \mathcal{C}_m . Que peut-on dire de \mathcal{C}_{-1} ? Montrer que tous les cercles \mathcal{C}_m ont deux tangentes communes et donner leurs équations.

Exercice 11 Soient A et B deux points distincts et k un réel. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = k$$

Exercice 12 Soient dans le plan deux points A et B distincts et un réel k . Etudier l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$.

Exercice 13 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan et A et B deux points du plan. Déterminer les points M du plan tels que : $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = \langle \overrightarrow{BM}, \vec{v} \rangle$

Exercice 14 Soit ABC un triangle équilatéral du plan et M un point l'intérieur de celui-ci. Montrer que la somme des distances de M aux trois cotés de ABC ne dépend pas de M . (Indication : introduire un repère adapté)

Exercice 15 [Faisceaux de cercles orthogonaux] Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Soit a un réel tel que $|a| \geq 1$; on considère le cercle Γ_a de centre $A(a, 0)$ de rayon $R = \sqrt{a^2 - 1}$.
Ecrire l'équation cartésienne de Γ_a .
Représenter sur une même figure les cercle $\Gamma_{3/2}, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_{-3/2}, \Gamma_{-2}$ et Γ_{-3} .
- On considère les points $C(1, 0)$ et $D(-1, 0)$. Montrer que pour tout point M du cercle Γ_a , le rapport MC/MD est constant.
- Soit b un réel. On définit le cercle Γ'_b de centre $B(0, b)$ passant par C et D .
Ecrire l'équation cartésienne de Γ'_b . Représenter sur la figure précédentes les cercles $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_{-1}$ et Γ'_{-2} .
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $|a| \geq 1$, et M_0 l'un des points d'intersection des cercles Γ_a et Γ'_b .
Ecrire des équations cartésiennes des tangentes en M_0 à Γ_a et Γ'_b . Vérifier que ces tangentes sont orthogonales.

Rab

Exercice 16

- Placer dans le plan les points dont on donne un système de coordonnées polaire (ρ, θ) : $M_1(2, \pi/4)$, $M_2(-1, -\pi)$, $M_3(-2, 3\pi/4)$, $M_4(3, \frac{\pi}{12})$, $M_5(-1, \frac{7\pi}{8})$.
Déterminer les coordonnées cartésiennes de chacun de ces points.
- Déterminer un système de coordonnées polaires des points suivants dont on donne les coordonnées cartésiennes : $A_1(2, 0)$, $A_2(3, -3)$, $A_3(-1, \sqrt{3})$.

Exercice 17 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère le point $\Omega(1, -1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1, 2)$ et $\vec{v}(-2, 3)$.

- Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère direct. Est-il orthonormal?
- Soit $A(5, 6)$ et $\vec{d}(-3, -3)$. déterminer les coordonnées de A et \vec{d} dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

3. Déterminer dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ une équation du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 18 Soient $\vec{u}(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ et $\vec{v}(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

- Montrer que (O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère orthonormé de P . Est-ce un repère orthonormé direct de P ?
- Soit M un point du plan, on note (x, y) (resp. x', y') les coordonnées cartésiennes de M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (resp. (O, \vec{u}, \vec{v})).
(a) Exprimer x et y en fonction de x' et y' .
(b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

Exercice 19 Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Développer : $\det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$

Exercice 20 Soit un triangle ABC . Deux droites Δ, Δ' parallèles à (BC) coupent (AB) et (AC) en D et E, D' et E' respectivement. Les droites (CD) et (BE) se coupent en un point M . Les droites (CD') et (BE') se coupent en un point M' . Montrer que les trois points A, M, M' sont alignés. (Indication : utiliser le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$)

Exercice 21 On considère le triangle ABC pour lequel les droites $(AB), (AC)$ et (BC) ont pour équations respectives $2x + y = 3, x + y = 2$ et $3x + 2y = 4$.

- Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.
- Déterminer une équation pour chaque médiane et vérifier que les médianes sont concourantes.
- Calculer l'aire de ABC .

Exercice 22 On note \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1. Former une équation cartésienne de la tangente à \mathcal{C} au point $M(\cos(\theta), \sin(\theta))$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 23 On considère le triangle ABC de sommets $A(1, 1), B(10, 13)$ et $C(13, 6)$.

- Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit ainsi que son rayon.
- Déterminer les coordonnées de l'orthocentre.
- Déterminer le lieu des points $M(x, y)$ vérifiant $d(M, (AB)) = d(M, (AC))$.