

TD 17

Espaces Vectoriels

Exercice 1 Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E pour :

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 0, 1))$.
2. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (2, 1, 0, -1))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, -1))$.
3. $E = \mathbb{K}_n[X]$, $F = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $G = \text{Vect}(1 + X + \dots + X^n)$.
4. $E = \mathbb{K}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$ et $G = \{aX + b \mid a, b \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 2 On se place dans E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On considère $F = \{f \in E \mid f'' + f = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Exercice 3 Soient $F = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \mid \int_{-1}^1 f(t)dt = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}) \mid f \text{ est constante}\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 4 Montrer que

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2)$$

Exercice 5 Soit la famille d'applications $(f_i)_{1 \leq i \leq 4}$ de $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ définie pour tout $x \in [0, 2\pi]$ par :

$$f_1(x) = \cos(x), f_2(x) = x \cos(x), f_3(x) = \sin(x) \text{ et } f_4(x) = x \sin(x)$$

Montrer que cette famille est libre.

Exercice 6 Soit $S = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = ((1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3))$ une famille de $E = \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que S est une base de E .
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = (5, 7, 12)$ dans cette base.

Exercice 7 On définit dans $\mathbb{R}^4$ les sous-ensembles suivants :

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right), G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid x + y + z + t = 0 \right\}, K = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{matrix} 2x - y + 2z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{matrix} \right\}$$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de H et une base de F .
3. Déterminer une base de $F \cap G$, de $F \cap H$ et de $H \cap K$.

Exercice 8 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

Pour aller plus loin

Exercice 9 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Montrer que

$$F \cap G = F + G \quad \Leftrightarrow \quad F = G$$

Exercice 10 Montrer que dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ des fonctions respectivement paires et impaires sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 11 Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 12 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les polynômes $X^2 + t/2$, $X - t$, $(X + t + 1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13 Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille est une base de E . Si c'est le cas, donner les coordonnées du vecteur x dans cette base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((-1, 1, 1); (1, -1, 1); (1, 1, -1))$ et $x = (2, 3, 4)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{F} = (1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2))$ et $x = X^3$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}\right)$ et $x = I_4$.
4. $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq 4, u_n = 0\}$ et $x = (-2, 3, 4, 0, 0, \dots)$.

Rab

Exercice 14

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $(5, 5, 1)$ est-il combinaison linéaire de $(1, 2, 3)$ et $(3, 1, 2)$?
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, $16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il combinaison linéaire de $8X^3 - 5X^2 + 1$ et $X^2 + 7X - 2$?
3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \mapsto \cos^2(x)$ est-il combinaison linéaire de $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$?
4. Dans $\mathbb{R}^3$, $x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

Exercice 15

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

Exercice 16

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

1. L'ensemble des suites convergentes.
2. L'ensemble des suites divergentes.
3. L'ensemble des suites arithmétiques
4. L'ensemble des suites monotones.
5. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

Exercice 17

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

1. Les fonctions monotones.
2. Les fonctions qui s'annulent en 0.
3. Les fonctions qui s'annulent
4. Les fonctions impaires.

Exercice 18

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces de E . Montrer que

1. $F \setminus G$ n'est pas un sous espace vectoriel de E .
2. $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Leftrightarrow F \subseteq G$ OU $G \subseteq F$.
3. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E . Prouver que

$$G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

Exercice 19

Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ et $u = (1, \dots, 1)$. Montrer que H et $\text{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 20

On définit les trois sous-espaces suivants de $E = \mathbb{K}_3[X]$:

$$\begin{aligned} F &= \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \\ G &= \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \\ H &= \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$
2. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 21

Dire si les familles suivantes sont libres ou liées. Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.

1. $((1, 1), (1, 2))$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $((2, 3), (-6, 9))$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. $((1, 3, 1), (1, 3, 0), (0, 3, 1))$, dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((1, 3), (-1, -2), (0, 1))$, dans $\mathbb{R}^2$.
5. $((3, 0, 1, -2), (1, 5, 0, -1), (7, 5, 2, 1))$, dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 22

Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $((1, 1), (3, 1))$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $((1, 0, 2), (1, 2, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 23

Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

1. $(u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$ avec $u = (1, 0, 1)$ et $v = (1, 1, 0)$.
2. $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$ avec $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$.
3. $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^3)^3$ avec $u = (2, 1, 1)$, $v = (1, -1, 2)$ et $w = (1, 2, -1)$.

Exercice 24

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $u = \sum_{i=1}^n a_i u_i$. On définit la famille $(v_1, \dots, v_n)$ par, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $v_i = u_i + u$. A quelle condition sur les scalaires a_i la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est-elle libre ?

Exercice 25

Montrer que les vecteurs $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 0)$, $(1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$ dans cette base.

Exercice 26

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(1, 0, t)$, $(1, 1, t)$, $(t, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 27

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espace suivants :

1. $F = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$.
2. $F = \text{Vect}(u, v, w)$ avec $u = (-1, 1, 0)$, $v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$.
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.