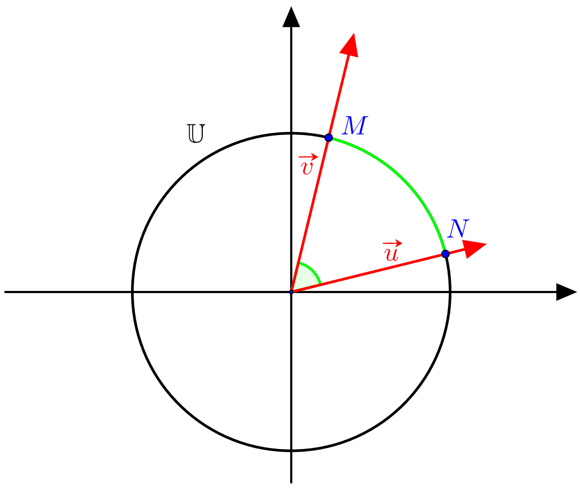
Chapitre III : Trigonométrie

I Définition

Dans le plan munit d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ on considère le cercle de centre O et de rayon 1, appelé **le cercle unité** ou **le cercle trigonométrique** et noté $\mathbb{U}$.
On oriente le cercle $\mathbb{U}$ dans **le sens trigonométrique** qui est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.

Définition I.1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On note M, respectivement N, le point d'intersection du cercle unité $\mathbb{U}$ avec la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$, respectivement de vecteur directeur $\vec{v}$. La mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ **en radian** est égale à la longueur de l'arc de cercle $\widehat{MN}$ compté positivement dans le sens trigonométrique et négativement sinon.



Remarque 1 :

1. La valeur d'un angle n'est défini qu'à 2π-près. Par exemple un quart de cercle vaut $\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{9\pi}{2} = \frac{-3\pi}{2} = \dots$.
2. Par enroulement de la droite des réels sur le cercle unité, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ correspond un point sur le cercle trigonométrique et un angle associé.

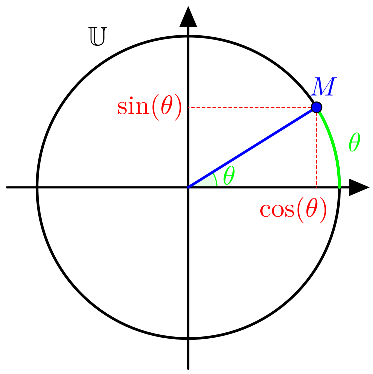
Définition I.2

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère le point $M \in \mathbb{U}$ du cercle unité tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta$. On définit alors le **cosinus** de θ, noté $\cos(\theta)$, respectivement le **sinus** de θ, noté $\sin(\theta)$, comme étant l'abscisse, respectivement l'ordonnée, du point M.

Définition I.3

- La **fonction cosinus**, notée cos est la fonction qui à tout réel θ associe son cosinus, $\cos(\theta)$.
- La **fonction sinus**, notée sin est la fonction qui à tout réel θ associe son sinus, $\sin(\theta)$.

Remarque 2 : Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.



Remarque 3 : Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle. Soit ABC un triangle rectangle en B. On désigne par θ l'angle $\widehat{BAC}$. Par translation (transformation du plan conservant les angles et les distances), on déplace le triangle pour amener le point A à l'origine. Par rotation (transformation du plan conservant les angles et les distances), du triangle autour du point O il est possible de faire coïncider la droite (OB) avec l'axe des abscisses tel que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{i}$ soient de même sens. On note C' le point d'intersection de (OC) avec le cercle unité $\mathbb{U}$. Les coordonnées du point C' sont donc $C'\,(\cos(\theta); \sin(\theta))$. On note B' le point de coordonnées $(\cos(\theta); 0)$. D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$ ou encore :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{OB}{OC} = \frac{OB'}{OC'} = \cos(\theta).$$

On retrouve bien l'antique formule $\cos(\theta) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$. On peut procéder de même pour montrer que l'on a également $\sin(\theta) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$.

Dessin :

Proposition I.4 (conséquences immédiates)

- Les fonctions cosinus et sinus sont bornées. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1.$$

- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta).$$

- La fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$ et la fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$

II Formulaire

Avant de donner une étude plus poussée des fonctions sinus et cosinus, nous allons établir des formules qui nous seront utiles par la suite.

Proposition II.1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Démonstration. Découle simplement de la définition des fonctions cosinus et sinus. Soient $x \in \mathbb{R}$, M le point de coordonnées $(\cos(x); \sin(x))$ et $N\,(\cos(x); 0)$ dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Le triangle OMN est rectangle en M. Donc d'après le théorème de Pythagore, $1 = OM^2 = ON^2 + NM^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$. □

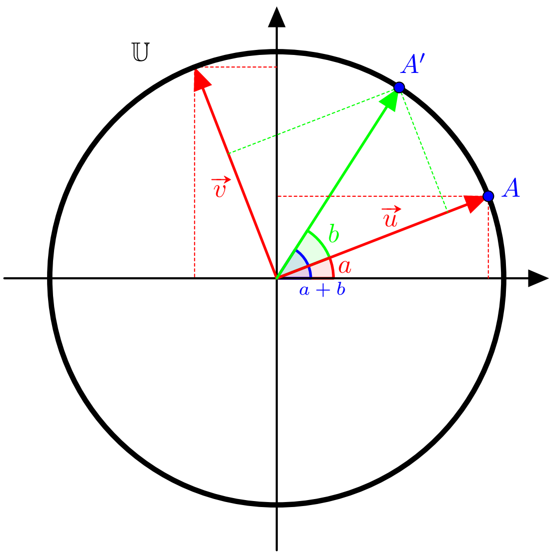
Exemple 4 : On admet que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}}$. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Proposition II.2

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a).$$

Démonstration. On fixe deux réels a et b et dans le repère $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on définit les points $A\,(\cos(a); \sin(a))$ et $A'\,(\cos(a+b); \sin(a+b))$. On pose également $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}$ tel que $\mathscr{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$ soit un repère orthonormé, c'est-à-dire tel que $\|\vec{v}\| = 1$, et tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.



Notez que dans ce nouveau repère, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $(1; 0)$. Le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ quant à lui peut être obtenu par rotation d'angle b du vecteur $\overrightarrow{OA}$ autour du point O. Autrement dit le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ a pour coordonnées $(\cos(b); \sin(b))$ dans le repère $\mathscr{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$. Donc

$$\overrightarrow{OA'} = \cos(b)\vec{u} + \sin(b)\vec{v}.$$

Or $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$ et $\vec{v} = \cos(a)\vec{j} + \sin(a)\left(-\vec{i}\right) = \cos(a)\vec{j} - \sin(a)\vec{i}$. Donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA'} &= \cos(b)\left(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}\right) + \sin(b)\left(\cos(a)\vec{j} - \sin(a)\vec{i}\right) \\
&= \cos(a)\cos(b)\vec{i} + \cos(b)\sin(a)\vec{j} + \cos(a)\sin(b)\vec{j} - \sin(a)\sin(b)\vec{i} \\
&= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)]\,\vec{i} + [\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)]\,\vec{j}.
\end{aligned}$$

Or dans le repère $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA'}$ sont $(\cos(a+b); \sin(a+b))$. Donc par unicité des coordonnées dans un même repère, on en déduit que

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a).$$

□

Corollaire II.3

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a - b) = \cos(b)\sin(a) - \cos(a)\sin(b).$$

Démonstration. Découle immédiatement de la Proposition II.2 en remplaçant b par $-b$ et de la parité ou de l'imparité des fonctions cosinus et sinus.

□

Corollaire II.4 (Formules de linéarisation)

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$
$$\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(b-a)}{2}.$$

Démonstration. Ces inégalités s'obtiennent en sommant ou soustrayant les formules des Propositions II.2 et II.3

□

Corollaire II.5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Démonstration. Découle du corollaire II.4 avec $a = b = x$ ou encore de la Proposition II.2 : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$ et donc $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

□

Exemple 5 : Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^3(x)$.

Remarque 6 : La Proposition II.2 doit être connue sur le bout des doigts ! Vous pouvez apprendre les Propositions II.3 à II.5 également par coeur mais je vous conseille plutôt d'apprendre à les retrouver RAPIDEMENT à partir de la Proposition II.2. Dans tous les cas une restitution rapide et correcte est attendue sur toutes ces formules.

Proposition II.6 (Formules de factorisation)

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Démonstration. Fixons $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et définissons a et b tels que $p = a + b$ et $q = a - b$, c'est-à-dire $a = \frac{p+q}{2}$ et

$b = \frac{p-q}{2}$. Alors d'après la Proposition II.2, on a

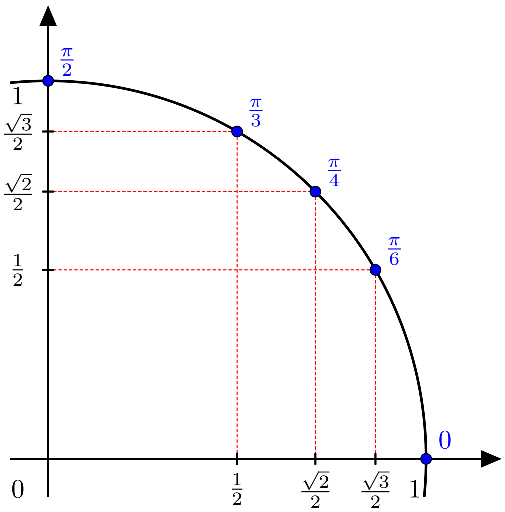
$$\begin{aligned}\cos(p) + \cos(q) &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ &= 2\cos(a)\cos(b) \qquad \textit{(on retrouve une égalité de la Proposition II.4)} \\ &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).\end{aligned}$$

□

Exercice 7 : Démontrer de même les autres égalités.

Proposition II.7 (Valeurs remarquables)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstration. D'après la définition des fonctions cosinus et sinus, on a $\cos(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(0) = 1$.

D'après la Proposition II.2 (ou directement par la Proposition II.5), on écrit que

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1.$$

Donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Remarquez bien que l'on pouvait obtenir ce résultat directement par la Proposition II.5 (le calcul ci-dessus retrace la démonstration de la Proposition II.5). Or pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que $\cos(x) \geqslant 0$. D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De même $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}$. Donc $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Démontrons les valeurs des fonctions cosinus et sinus en $\frac{\pi}{3}$. D'après la Proposition II.2,

$$\begin{aligned}-1 = \cos(\pi) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

On élimine le sinus grâce à la Proposition II.1 et on obtient

$$-1 = \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Notons $X = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Le réel X est alors solution de l'équation

$$4X^3 - 3X + 1 = 0.$$

On s'aperçoit que -1 est une solution évidente, on peut donc factoriser $4X^3 - 3X + 1$ par $X + 1$. Donc le réel X est solution de l'équation

$$4X^3 - 3X + 1 = (X+1)\left(4X^2 - 4X + 1\right) = (X+1)(2X-1)^2 = 0.$$

Les solutions sont donc $X = -1$ ou $2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Comme le cosinus est positif sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq -1$ et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pour en déduire la valeur du sinus, on utilise la Proposition II.1,

$$1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Puis, comme le sinus est positif sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La démonstration des valeurs de cosinus et sinus en $\frac{\pi}{6}$ est laissée en exercice.

□

Exemple 8 : A l'aide de la Proposition II.6, calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Proposition II.8

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Exercice 9 : Démontrer ces formules à l'aide de la Proposition II.2.

Exemple 10 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, simplifier $\cos(x + k\pi)$ et $\sin(x + k\pi)$.

Remarque 11 :

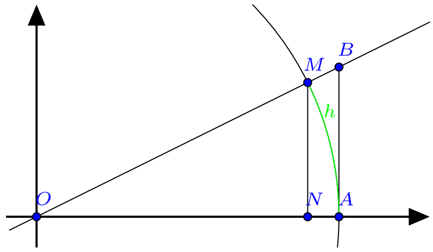
1. Ces égalités découlent de la Proposition II.2 mais vous devez savoir les retrouver rapidement à l'aide de dessins.
2. Grâce à ces égalités, il est possibles d'étendre (et de retrouver si besoin) les valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus sur le cercle entier (et non juste le premier quart de cercle de la Proposition II.7).

III Propriétés

Proposition III.1 (Limites remarquables)

- $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1$
- $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}$

Démonstration. Notations. Soit $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, on considère les points $M(\cos(h); \sin(h))$, $N(\cos(h); 0)$, $A(1; 0)$ et B le point d'intersection de (OM) avec la droite perpendiculaire à (OA) passant par A.



Continuité de cosinus en 0. Commençons par montrer que la fonction cosinus est continue en 0, c'est-à-dire que $\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1$. Puisque $h = \widehat{MA} \geqslant MA \geqslant NA$, on en déduit que $1 = ON + NA = \cos(h) + NA \leqslant \cos(h) + h$ et bien sûr $\cos(h) \leqslant 1$. Donc

$$\forall h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad 1 - h \leqslant \cos(h) \leqslant 1.$$

Si $h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, on a $-h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $1+h \leqslant \cos(-h) \leqslant 1$. Donc par parité de la fonction cosinus, $1+h \leqslant \cos(h) \leqslant 1$. Enfin, si $h = 0$ l'inégalité est trivial. Donc

$$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad 1 - |h| \leqslant \cos(h) \leqslant 1.$$

En passant à la limite quand $h \to 0$, on obtient bien $\lim\limits_{h\to 0} \cos(h) = 1$.

Première limite. Montrons maintenant la limite de $\frac{\sin(h)}{h}$ en 0. Fixons à nouveau $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et reprenons les points précédemment définies. On a $MN \leqslant MA \leqslant \widehat{MA} \leqslant AB$ (admis). Or $MN = \sin(h)$, $\widehat{MA} = h$ et par le théorème de Thalès (les droites (MN) et (AB) étant perpendiculaires à la même droite (OA), sont parallèles entre elles),

$$\frac{MN}{AB} = \frac{ON}{OA} \Leftrightarrow \frac{\sin(h)}{AB} = \frac{\cos(h)}{1} \Leftrightarrow AB = \frac{\sin(h)}{\cos(h)}.$$

Notez bien que l'on ne divise pas par 0 car $h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow AB \neq 0$ et $\cos(h) \neq 0$. Ainsi l'inégalité $MN \leqslant \widehat{MA} \leqslant AB$ implique que

$$\sin(h) \leqslant h \leqslant \frac{\sin(h)}{\cos(h)}.$$

Par positivité stricte de h et de $\cos(h)$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que

$$\forall h \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1.$$

Par parité du cosinus et imparité du sinus, on obtient également pour tout $h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$, $\cos(-h) \leqslant \frac{\sin(-h)}{-h} \leqslant 1 \Leftrightarrow \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1$. Donc

$$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1.$$

Or nous avons vu que $\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1$. Donc par le théorème d'encadrement, on conclut que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Seconde limite. Montrons maintenant $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}$. D'après la Proposition II.2, on a

$$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cos(h) = \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right).$$

Donc

$$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2.$$

Or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{h}{2} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1$, donc par composition de limites, on a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$. Puis par continuité de la fonction carré, on conclut que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}.$$

□

Proposition III.2

- La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos'(x) = -\sin(x).$$
- La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sin'(x) = \cos(x).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. D'après la Proposition II.2, on a

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\cos(x)\sin(h)+\cos(h)\sin(x)-\sin(x)}{h} = \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} - \sin(x)h\frac{1-\cos(h)}{h^2}.$$

Donc en utilisant le Proposition III.1 et par produits et somme de limites finies, on obtient que

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \cos(x) \times \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} - \sin(x) \times \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} h \times \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2}\\ &= \cos(x) \times 1 - \sin(x) \times 0 \times \frac{1}{2}\\ &= \cos(x).\end{aligned}$$

Donc la fonction sinus est dérivable au point x et $\sin'(x) = \cos(x)$.
La dérivabilité de la fonction cosinus est similaire et est laissée en exercice.

□

Exemple 12 : On souhaite redémontrer la Proposition II.2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \cos(\alpha - x)\cos(x) - \sin(\alpha - x)\sin(x).\end{aligned}$$

1. Montrer que u est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la formule $\cos(a+b) = \dots$.
3. Faire de même avec $v : x \mapsto \sin(\alpha - x)\cos(x) + \cos(\alpha - x)\sin(x)$.

De la proposition précédente et du signe des fonctions cosinus et sinus, on en déduit leurs tableaux de variations.

Proposition III.3

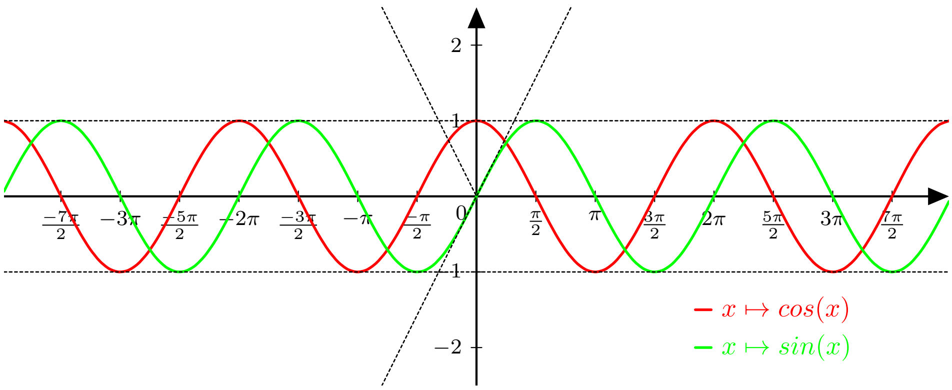
La fonction cosinus est une fonction 2π-périodique, paire, dont le tableau de variations sur $[0; 2\pi]$ est le suivant.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$x \mapsto \cos(x)$	1	↘ 0	-1	↗ 0	1

Proposition III.4

La fonction sinus est une fonction 2π-périodique, impaire, dont le tableau de variations sur $[0; 2\pi]$ est le suivant.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$x \mapsto \sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



Remarque 13 : Pour mémoriser si la dérivée de cos est $+\sin$ ou $-\sin$, on peut retrouver ce résultat graphiquement en observant que, après 0, le cosinus décroit et que donc sa dérivée est négative : $\cos' = -\sin$ tandis que le sinus a une pente positive en 0 et donc a une dérivée positive : $\sin' = \cos$.

Proposition III.5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$|\sin(x)| \leqslant |x|\,.$$

Démonstration. On procède par disjonction de cas.

- Si $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. Alors $|x| \geqslant 1 \geqslant |\sin(x)|$. Donc l'inégalité est vraie dans ce cas.
- Deuxième cas, si $x \in [0; 1]$. On note que $[0; 1] \subseteq \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\sin(x) \geqslant 0$ i.e. $|\sin(x)| = \sin(x)$. Il nous faut donc établir dans ce cas que $\sin(x) \leqslant x$.

  Posons $f : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \sin(x) \end{array}$. La fonction f est définie et même dérivable sur $[0; 1]$ comme composée de fonctions qui le sont. De plus,
  $$\forall x \in [0; 1]\,, \qquad f'(x) = 1 - \cos(x).$$
  Or on sait déjà que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \leqslant 1$. Donc $\forall x \in [0; 1]$, $f'(x) \leqslant 0$. Ainsi la fonction f est décroissante sur $[0; 1]$ et l'on observe que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \sin(1)$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$1 - \sin(1)$

On en déduit donc que

$$\forall x \in [0;1], \qquad f(x) = x - \sin(x) \geqslant 0 \qquad \text{i.e.} \qquad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$

- Troisième cas, $x \in [-1;0]$. Alors, $y = -x \in [0;1]$. Donc par le cas précédent,

$$|\sin(y)| \leqslant |y| \qquad \Leftrightarrow \qquad |\sin(-x)| \leqslant |-x| \qquad \Leftrightarrow \qquad |-\sin(x)| \leqslant |x|,$$

par parité de la valeur absolue et imparité de la fonction sinus.

$$|\sin(y)| \leqslant |y| \qquad \Leftrightarrow \qquad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$

L'inégalité est encore vraie.

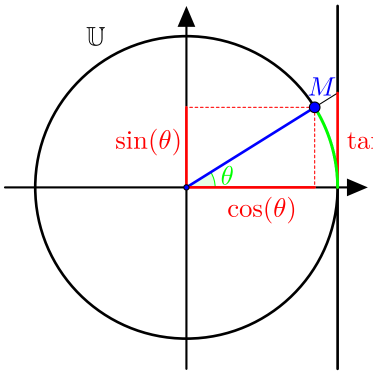
□

IV La fonction tangente

Définition IV.1

Sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ on définit la fonction **tangente** notée tan par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$



Proposition IV.2

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Démonstration. La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables ne s'annulant pas sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donc la fonction tangente est dérivable sur cet ensemble et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Mais en utilisant également l'égalité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on peut aussi l'écrire :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

□

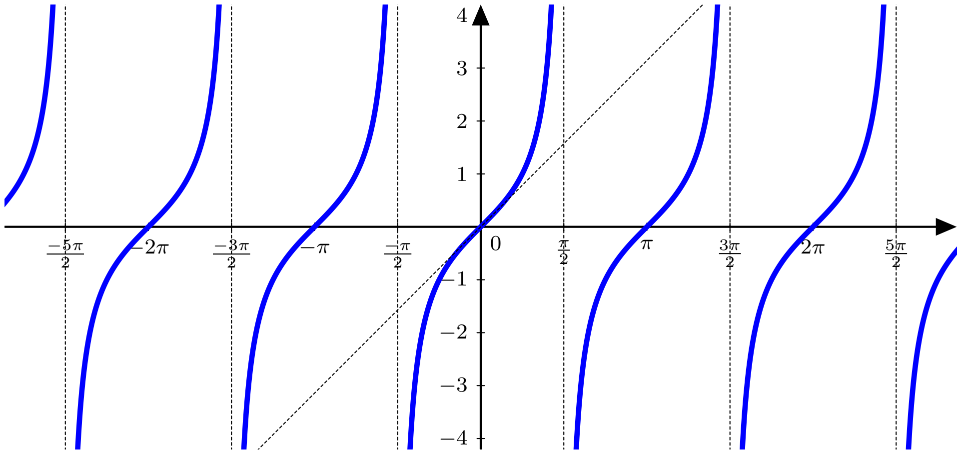
Proposition IV.3

La fonction tangente est π-périodique, impaire et croissante sur tous les intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, où $k \in \mathbb{Z}$. Son tableau de variation est le suivant.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$x \mapsto \tan(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

Démonstration. EXO !

□



Proposition IV.4

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition IV.5 (Limite remarquable)

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1$$

Démonstration. Puisque $\tan(0) = 0$, on reconnait la limite du taux d'accroissement de la fonction tangente en 0, donc

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\tan(h) - \tan(0)}{h - 0} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1.$$

□

Proposition IV.6

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que a, b et $a+b$ soient dans l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Notamment pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$,

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

Démonstration. EXO ! □

Proposition IV.7

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que les quantités suivantes soient bien définies,

- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\tan(x \pm \pi) = \tan(x)$
- $\tan\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$

Exemple 14 : Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Proposition IV.8 (Formules de l'angle moitié)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que les quantités suivantes soient bien définies. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors,

- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. D'après la Proposition II.2,

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1.$$

Or, nous avons vu que pour tout $\tan'\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$. Donc $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$. Ainsi,

$$\cos(x) = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

D'après la Proposition II.2,

$$\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)t.$$

Or nous avons vu que $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$. Donc

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Enfin pour la dernière égalité, on peut utiliser la Proposition IV.6 ou directement grâce aux précédentes inégalités, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \right)$,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

□

V Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques

V.1 Introduction aux congruences

Définition V.1

Soient x, y et α trois réels. On dit que x est **congru** à y **modulo** α s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x - y = k\alpha.$$

On note alors

$$x \equiv y \ [\alpha].$$

Proposition V.2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- La congruence est **transitive**. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} x \equiv y \ [\alpha] \\ y \equiv z \ [\alpha] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \equiv z \ [\alpha].$$

- La congruence est **compatible avec l'addition et la soustraction**. Pour tout $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \ [\alpha] \\ x_2 \equiv y_2 \ [\alpha] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2 \ [\alpha] \\ x_1 - x_2 \equiv y_1 - y_2 \ [\alpha]. \end{cases}$$

- La congruence **N'**est **PAS** compatible avec la multiplication. Pour tout $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$,

$$x \equiv y \ [\alpha] \quad \Rightarrow \quad \lambda x \equiv \lambda y \ [\lambda\alpha].$$

Exemple 15 :

1. Si $x \equiv y \ [2\pi]$ alors $\cos(x) = \cos(y)$ et $\sin(x) = \sin(y)$.
2. Si $x \equiv y \ [\pi]$ alors $\cos(x) = \pm\cos(y)$, $\sin(x) = \pm\sin(y)$ et $\tan(x) = \tan(y)$.
3. La fonction tangente est définie sur $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \right\}$.

V.2 Equations

Proposition V.3

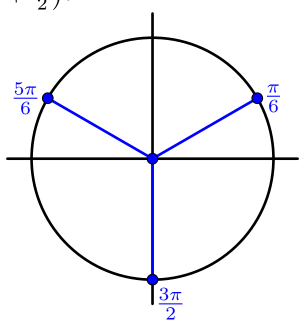
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \cos(x) = \cos(y) \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv y \ [2\pi] \text{ OU } x \equiv -y \ [2\pi] \\ \sin(x) = \sin(y) \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv y \ [2\pi] \text{ OU } x \equiv \pi - y \ [2\pi] \\ \cos(x) = \cos(y) \text{ ET } \sin(x) = \sin(y) \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv y \ [2\pi] \end{aligned}$$

Remarque 16 : Cette proposition n'est pas à apprendre par coeur mais doit pouvoir se retrouver facilement à l'aide d'un schéma.

Exemple 17 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'équation* $\cos(2x - \pi) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

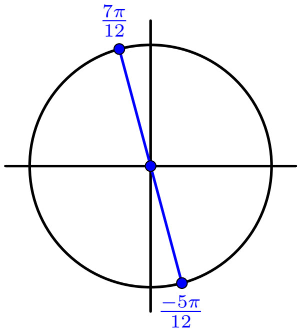
$$\begin{aligned} \cos(2x - \pi) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x - \pi \equiv x + \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \text{ ou } 2x - \pi \equiv -x - \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{2} \ [2\pi] \text{ ou } 3x \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{2} \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6} \ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ &\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{6} \ \left[\frac{2\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$



Exemple 18 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'équation* $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

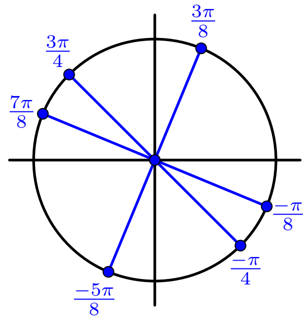
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad x-\frac{\pi}{3} \equiv x+\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } x-\frac{\pi}{3} \equiv \pi - x - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \equiv \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad 2x \equiv \frac{7\pi}{6}\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{7\pi}{12}\ [\pi].
\end{aligned}$$



Exemple 19 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'équation* $\sin(3x)=\cos(x+\pi)$.
Un sinus est un cosinus qui s'ignore et réciproquement. Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\sin(3x) = \cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sin(3x)=\cos(x+\pi) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x+\pi) \\
&\Leftrightarrow \quad 3x-\frac{\pi}{2} \equiv x+\pi\ [2\pi] \text{ ou } 3x-\frac{\pi}{2} \equiv -x-\pi\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad 2x \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } 4x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{3\pi}{4}\ [\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right].
\end{aligned}$$

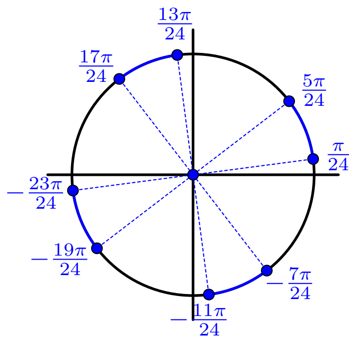


V.3 Inequations

Exemple 20 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'inéquation* $4\sin(4x)+3>5$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

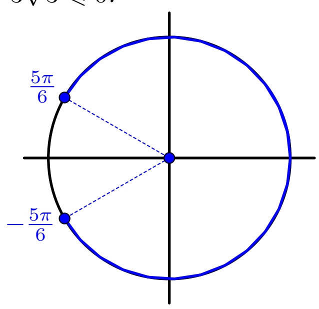
$$\begin{aligned}
4\sin(4x)+3>5 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(4x) > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 4x \in \left]\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right[\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \left]\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\right[.
\end{aligned}$$



Exemple 21 : *Déterminer l'ensemble des réels vérifiant l'inéquation* $6\cos(x+\pi)-3\sqrt{3} \leqslant 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
6\cos(x+\pi)-3\sqrt{3} \leqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x+\pi) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x+\pi \in \left[\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right] \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \left[\frac{-5\pi}{6}+2k\pi; \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right].
\end{aligned}$$



V.4 Paramétrage du cercle trigonométrique et applications

Proposition V.4

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$.
- Réciproquement, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2=1$, alors il existe un unique $\theta \in [0;2\pi[$ tel que

$$x=\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad y=\sin(\theta).$$

Démonstration. Le premier point est un rappel de la Proposition II.1.
Pour le second point, fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$ et observons que $x^2 = 1 - y^2 \leqslant 1$. Donc $x \in [-1; 1]$. Or $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ et la fonction cosinus est continue sur $[0; \pi]$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta_0 \in [0; \pi]$ tel que $\cos(\theta_0) = x$. Par conséquent, $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2(\theta_0) = \sin^2(\theta_0)$. Procédons par disjonction de cas :

— Si, $y \geqslant 0$, on pose $\theta = \theta_0 \in [0; \pi]$. Alors $y = \sin(\theta)$ et $x = \cos(\theta)$.

— Sinon, si $y < 0$, on pose $\theta = -\theta_0 + 2\pi \in [\pi; 2\pi]$. Observons que dans ce cas $\theta_0 \neq 0$ car sinon $y^2 = \sin^2(2\pi) = 0$. Donc $\theta \in [\pi; 2\pi[$. Alors $\sin(\theta) = \sin(-\theta_0) = -\sin(\theta_0)$ donc $y^2 = \sin^2(\theta)$ et comme les deux membres de cette égalité sont de même signe (négatif), on en déduit que $y = \sin(\theta)$. Enfin on vérifie bien que $x = \cos(\theta_0) = \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$.

Dans tous les cas on a démontré l'existence d'un réel $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$.
L'unicité découle du point 3 de la proposition V.3.

□

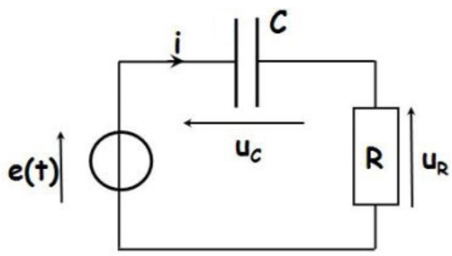
Application : forme polaire de $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$.
Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$. Puisque $(a, b) \neq (0, 0)$, on a $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$. Donc

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin(\theta)\right).$$

Posons $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Alors il est facile de vérifier que $x^2 + y^2 = 1$. Donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\varphi)$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\varphi)$. Ainsi,

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\cos(\varphi)\cos(\theta) + \sin(\varphi)\sin(\theta)\right) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \varphi).$$

Exemple 22 :
Dans un circuit électrique, on considère une résistance R et un condensateur de capacité C en série. On suppose que l'intensité i est en fonction du temps t sinusoïdale : $i(t) = I\cos(\omega t)$, avec I et ω deux réels.



1. *Exprimer la tension aux bornes de l'ensemble résistance-condensateur, notée $e(t)$.*
2. *On suppose que $C = \frac{1}{R\omega}$, montrer alors que la tension e est un signal sinusoïdal déphaser de $-\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'intensité et déterminer son amplitude.*

1. La tension aux bornes de la résistance est donnée par $u_R(t) = Ri(t) = RI\cos(\omega t)$. La tension aux bornes du condensateur est liée à l'intensité par la relation $Cu_C'(t) = i(t) = I\cos(\omega t) \Leftrightarrow u_C'(t) = \frac{I}{C}\cos(\omega t)$. Donc en intégrant cette égalité, $u_C(t) = \frac{I}{C\omega}\sin(\omega t)$. Les tensions en séries s'ajoutent donc

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) = RI\cos(\omega t) + \frac{I}{C\omega}\sin(\omega t).$$

2. On suppose que $C = \frac{1}{R\omega}$. Donc,

$$e(t) = RI\left(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right).$$

On applique désormais le procédé vu précédemment :

$$\begin{aligned} e(t) &= \sqrt{2}RI\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)\right) \\ &= \sqrt{2}RI\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\omega t) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\omega t)\right) \\ &= \sqrt{2}RI\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que l'amplitude de e est $\sqrt{2}RI$ et qu'il est déphasé de $-\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'intensité $i(t)$.

VI Prochainement... Calcul algébrique - Notations

Définition VI.1

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note

- $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ **la somme** de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$,
- $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ **le produit** de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Si $I = [\![q;p]\!] = \{q, q+1, \ldots, p-1, p\}$, avec $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$, on note également

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{q\leqslant i\leqslant p} a_i = \sum_{i=q}^{p} a_i = a_q + a_{q+1} + a_{q+2} + \cdots + a_p$$

$$\prod_{i\in I} a_i = \prod_{q\leqslant i\leqslant p} a_i = \prod_{i=q}^{p} a_i = a_q \times a_{q+1} \times a_{q+2} \times \cdots \times a_p.$$

Exemple 23 :

1. Si $I = [\![1;5]\!]$ et $a_i = i$ pour tout $i\in I$, alors

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{i=1}^{5} i = \frac{5(5+1)}{2} = 15 \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{5} a_i = \prod_{i=1}^{5} i = 120 = 5!$$

2. Si $I = \{0, 2, 4, 6\}$ et $a_i = 2^i$ pour tout $i\in I$, alors

$$\sum_{i\in I} a_i = 2^0+2^2+2^4+2^6 = 1+4+16+64 = 85 \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} a_i = 2^0\cdot 2^2\cdot 2^4\cdot 2^6 = 2^{12} = 4^6 = 16^3 = 4096.$$

Remarque 24 : L'indice de sommation est muet !
L'indice i utilisé pour décrire la famille $(a_i)_{i\in I}$ ainsi que la somme $\sum_{i\in I} a_i$ ou le produit $\prod_{i\in I} a_i$ est un indice muet qui peut être modifié en une autre lettre sans porter à conséquence :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in I} a_k = \sum_{f\in I} a_f = \sum_{\zeta\in I} a_\zeta.$$

Naturellement et comme à l'accoutumée, on veillera à ne pas utiliser une lettre précédemment réservée.

Remarque 25 : IMPORTANT. La somme totale (ou le produit) ne doit JAMAIS dépendre de l'indice de sommation (ou de multiplication). Des monstruosités du genre $\sum_{k=1}^{10k} a_k$ ou $\sum_{k=1}^{100} a_k = \frac{57k+2}{100}$ ne doivent jamais être commises.

Remarque 26 : La longueur d'une somme $\sum_{k=q}^{p}\cdots$ est de $p-q+1$.

Proposition VI.2

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Note historique : le mot « sinus » est un mot latin signifiant « courbe, pli, cavité ». Il a donné en français les mots « sein » (en italien le sinus mathématique se dit « seno » qui signifie également « sein ») et « sinueux ».
*L'histoire du mot « sinus » vient probablement d'une erreur de traduction. Au VIième siècle, le mathématicien indien Âryabhata utilise le mot **jîva** qui signifie « corde ». Au VIIIième siècle, le mathématicien arabe Al-Fazzârî arabise le mot en **jîba** (n'ayant aucune signification en arabe). C'est alors qu'au XIIième siècle, l'écrivain et traducteur italien Gerard de Crémone confond **jîba** avec **jaîb**, d'autant plus facilement qu'en arabe les voyelles sont parfois omises. **Jaîb** signifiant « poche, cavité », il le traduisit en latin par « sinus ». Le mot « cosinus » (de co-sinus) date lui du XVIIIième siècle.*

***Srinivasa RAMANUJAN** (Erode, Inde 1887 - Kumbakonan, Inde 1920) est le fils d'un employé de magasin de Kumbakonam à cent soixante kilomètres de Madras dans le sud de l'Inde. Ses dons exceptionnels en mathématiques sont rapidement remarqués mais c'est en autodidacte qu'il les développera à travers des livres qui se contentent parfois de cataloguer des théorèmes sans donner de démonstration. Vivant dans une grande pauvreté matérielle, Ramanujan prend cette habitude de n'écrire que ses résultats sur papier, qu'il consigne dans des cahiers et de faire tous ses calculs de tête ou sur ardoise. Il rédige également selon ses propres notations. Toujours excellent en mathématiques mais médiocre dans les autres discipline, il échoue à plusieurs reprises aux examens qui lui aurait permis d'accéder à un enseignement supérieur conventionnel. Il arrive cependant à se faire connaître de quelques mathématiciens indiens et obtient un premier poste de fonctionnaire à Madras. Il envoie par la suite ses travaux à plusieurs mathématiciens britanniques. Seul Hardy (cf chapitre 14) répond favorablement à la lettre de neuf pages de Ramanujan. Hardy croit au début à une mystification tellement il est étonné par le contenu de cette lettre. Il y reconnaît bien certaines formules (que Ramanujan a redécouvert en autodidacte) mais d'autres lui semblent à peine croyables. Convaincu avec son ami et collègue Littlewood du génie de Ramanujan, il le fait venir en avril 1914 en Angleterre et commence alors une fructueuse collaboration entre Hardy et Ramanujan. Hardy est très impressionné par l'intuition fulgurante de Ramanujan et la quantité de nouveaux résultats qu'il lui présente mais déplore son manque de formation et de rigueur. Il doit souvent insister auprès de Ramanujan pour obtenir davantage de démonstrations. Les travaux de Ramanujan portent en particulier sur les séries (cf chapitre 20) et la théorie des nombres. Malade de longue date, peut-être accentué par le climat britannique et la difficulté d'y suivre son régime végétarien stricte exigé par son brahmanisme orthodoxe, il retourne en 1919 dans son pays et y meurt l'année suivante à l'âge de 33 ans.*

Saisi d'étonnement par les nouveaux théorèmes que Ramanujan lui proposait dans sa lettre, Hardy fit la remarque suivante :

« ces théorèmes doivent être vrais, car s'ils n'étaient pas vrais, personne n'aurait assez d'imagination pour les inventer »

Interrogé par Erdos pour savoir qu'elle fut sa plus grande contribution aux mathématiques, Hardy répondit sans hésitation que ce fut sa découverte de Ramanujan.

Hardy encore raconte l'anecdote suivante :
« Je me souviens que j'allais le voir une fois alors qu'il était malade, à Putney. J'avais pris un taxi portant le numéro 1729 et je remarquais que ce nombre me semblait peu intéressant, ajoutant que j'espérais que ce ne fût pas mauvais signe. ? Non, me répondit-il, c'est un nombre très intéressant : c'est le plus petit nombre décomposable en somme de deux cubes de deux manières différentes »
En effet, $9^3 + 10^3 = 1^3 + 12^3 = 1729$...

Un sinus et un cosinus sont bons amis. Le sinus est fêtard et le cosinus plutôt pantouflard mais un soir le sinus convainc le cosinus de sortir avec lui en boîte de nuit. Comme à son habitude le sinus s'amuse bien mais le cosinus reste boudeur au bar. Quand le sinus lui demande ce qui ne va pas le cosinus lui répond :
« -Tu es sympa mais dans cette boîte je n'ai rencontré que des sinus et aucun cosinus.
-Allez fais un effort, tu n'as qu'à t'intégrer ! »