Corrigé du Devoir Surveillé 2
Trigonométrie, complexes, calcul algébrique

Problème I - Trigonométrie

Partie 1 : Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{12}$

1. *Méthode 1.*

   (a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Développons $\cos(a-b)$. Par le cours, on a

   $$\boxed{\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b).}$$

   (b) Posons $a=\frac{\pi}{3}$ et $b=\frac{\pi}{4}$ et déterminons $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Par la question précédente,

   $$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   $$\Leftrightarrow\quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.}$$

2. *Méthode 2.*

   (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrons que $\sin(3x)=3\sin(x)-4\sin^3(x)$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

   $$\begin{aligned}\sin(3x)&=\sin(2x+x)\\&=\sin(2x)\cos(x)+\sin(x)\cos(2x)\\&=2\sin(x)\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\left(1-2\sin^2(x)\right)\\&=2\sin(x)\cos^2(x)+\sin(x)-2\sin^3(x)\\&=2\sin(x)\left(1-\sin^2(x)\right)+\sin(x)-2\sin^3(x)\\&=3\sin(x)-4\sin^3(x).\end{aligned}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin(3x)=3\sin(x)-4\sin^3(x).}$$

   (b) Montrons que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine de $P(X)=4X^3-3X+\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si $X=\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a

   $$\begin{aligned}P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)&=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=4\frac{2\sqrt{2}}{8}-2\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\sqrt{2}-\sqrt{2}\\&=0.\end{aligned}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ est une racine de }P.}$$

(c) Soit $X \in \mathbb{R}$. Résolvons $P(X) = 0$. Par la question précédente, on sait que $\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ factorise P :

$$P = 4X^3 - 3X + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(4X^2 + 2\sqrt{2}X - 1\right).$$

Déterminons les racines de $4X^2 + 2\sqrt{2}X - 1$. Soit Δ le discriminant associé :

$$\Delta = 8 + 16 = 24 = 4 \times 6.$$

Donc les racines associées sont

$$X_1 = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{8} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de $P(X) = 0$ est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right\}.}$$

(d) Calculons $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. On a vu dans la question 2.a que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$. En prenant $x = \frac{\pi}{12}$, on obtient,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{12}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Posons $X = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, alors,

$$4X^3 - 3X + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(X) = 0.$$

Donc par la question précédente,

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ OU } \ X = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \ \text{ OU } \ X = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Or $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{4}$. Donc par la stricte croissance de la fonction sinus sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$,

$$0 < X = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc $X \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $X \neq -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} < 0$. Conclusion,

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.}$$

(e) Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} \\
&= \frac{16 - 8 + 4\sqrt{3}}{16} \\
&= \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on observe que

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Donc

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Or $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$. Donc par la stricte décroissance de la fonction cosinus sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$. Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.}$$

3. *Méthode 3.*
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Factorisons $\sin(4x) + \sin(2x)$. Par la formule $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on a

   $$\sin(4x) + \sin(2x) = 2\sin\left(\frac{6x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x}{2}\right) = 2\sin(3x)\cos(x).$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(4x) + \sin(2x) = 2\sin(3x)\cos(x).}$$

   (b) Calculons encore $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En prenant $x = \frac{\pi}{12}$ dans la question précédente, on a

   $$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\\ &\Leftrightarrow \qquad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

   Conclusion, rien à faire, on obtient toujours le même résultat,

   $$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.}$$

4. Calculons $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. On observe que $\frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$. Dès lors,

   $$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

   Conclusion, par la question 2.d

   $$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

   On observe que $2024 = 24 \times 84 + 8$. Donc

   $$\frac{2025\pi}{12} = 84 \times 2\pi + \frac{8\pi}{12} = 84 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

   Ainsi,

   $$\cos\left(\frac{2025\pi}{12}\right) = \cos\left(84 \times 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

   Conclusion, *(oui* 2024 *ne ramène pas du* $\pi/12$*)*

   $$\boxed{\cos\left(\frac{2025\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}.}$$

Partie 2 : En passant par les complexes

On considère les nombres complexes $z_1 = 1+i$, $z_2 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $Z = z_1 z_2$.

5. Calculons Z. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$Z = z_1 z_2 = (1+i)\,\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Conclusion, la forme algébrique de Z est donnée par

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.}$$

6. Calculons la forme polaire de z_1, z_2 et Z. On a

$$z_1 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

De plus,

$$|z_2| = \left|\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6+2} = \frac{1}{2}2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Dès lors,

$$z_2 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Enfin,

$$Z = z_1 z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \quad Z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}.}$$

7. Calculons $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Par les deux précédentes questions, on a

$$Z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

Par unicité de la forme algébrique, on en déduit que

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.}$$

8. Résolvons $(E) : \left(1-\sqrt{3}\right)\cos(x) - \left(1+\sqrt{3}\right)\sin(x) = \sqrt{6}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En multipliant par $\frac{\sqrt{2}}{4}$, on a

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\sin(x) = \frac{\sqrt{12}}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin(x) = \frac{2\sqrt{3}}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad -\cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x - \frac{5\pi}{12} \equiv \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \; [2\pi] \quad \text{OU} \quad x - \frac{5\pi}{12} \equiv \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \; [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad x \equiv \frac{5\pi}{12} + \frac{10\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4} \; [2\pi] \quad \text{OU} \quad x \equiv \frac{5\pi}{12} + \frac{14\pi}{12} = \frac{19\pi}{12} \equiv -\frac{5\pi}{12} \; [2\pi].
\end{aligned}$$

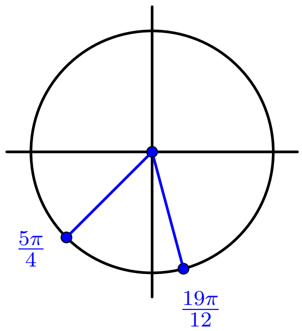
Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

9. Précisons les solutions dans $[0; 2\pi[$ et représentons-les. Par la question précédente, les solutions dans $[0; 2\pi[$, sont

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0;2\pi[} = \left\{ \frac{5\pi}{4} \; ; \; \frac{19\pi}{12} \right\}.}$$

Ainsi,



Problème II - Complexes

On pose :

$$f: \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+1}.$$

1. Calculons $\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \text{ existe.} \}$. On a les équivalences suivantes :

$$z \in \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad z+1 \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = -1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-1\}.}$$

2. Calculons $f(0)$, $f\left(\frac{i-1}{2}\right)$ et $f(-1+i)$ puis précisons leurs formes polaires. On a

$$f(0) = \frac{-i}{+1} = -i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Puis,

$$f\left(\frac{i-1}{2}\right) = \frac{\frac{i-1}{2} - i}{\frac{i-1}{2} + 1} = \frac{i-1-2i}{i-1+2} = \frac{-1-i}{1+i} = -1 = \mathrm{e}^{i\pi}.$$

Enfin,

$$f(-1+i) = \frac{-1+i-i}{-1+i+1} = \frac{-1}{i} = i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0) = -i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad f\left(\frac{i-1}{2}\right) = -1 = \mathrm{e}^{i\pi}, \quad f(-1+i) = i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}.}$$

3. Déterminons l'ensemble des complexes $z \in \mathcal{D}$ tel que $f(z)^2 = 1$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(z)^2 = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z-i}{z+1}\right)^2 = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad (z-i)^2 = (z+1)^2 \qquad \text{car } z \neq -1 \\
& \Leftrightarrow \quad z^2 - 2iz - 1 = z^2 + 2z + 1 \\
& \Leftrightarrow \quad -2 = (2+2i)\, z \\
& \Leftrightarrow \quad z = \frac{-2}{2(1+i)} \\
& \Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{1+i} = -\frac{1-i}{2} = \frac{-1+i}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{-1+i}{2}\right\}.}$$

4. Déterminons $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$ et donnons la représentation graphique de cet ensemble. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On

a les équivalences suivantes :

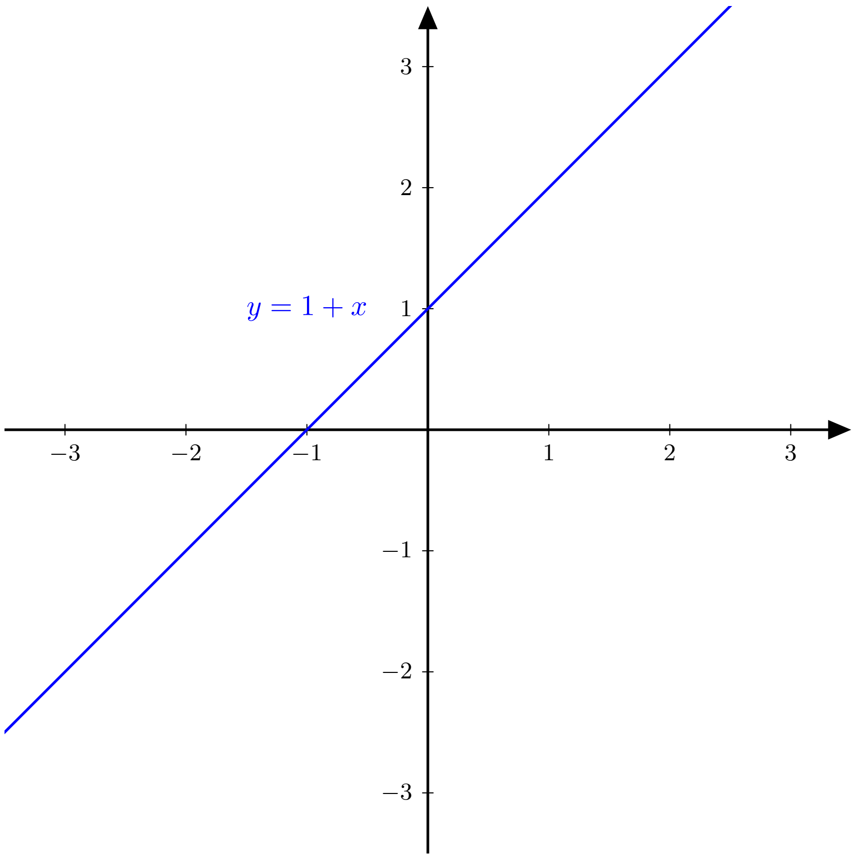
$$\begin{array}{rcl} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & f(z) \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow & f(z) = \overline{f(z)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{z-i}{z+1} = \dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}+1} \\ & \Leftrightarrow & (z-i)(\overline{z}+1) = (\overline{z}+i)(z+1) \qquad \text{car } z \neq -1 \\ & \Leftrightarrow & |z|^2 + z - i\overline{z} - i = |z|^2 + \overline{z} + iz + i \\ & \Leftrightarrow & z - \overline{z} - i(z+\overline{z}) = 2i \\ & \Leftrightarrow & 2i\mathrm{Im}(z) - 2i\mathrm{Re}(z) = 2i \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) = 1. \end{array}$$

Posons $z = x + iy$. Alors,

$$z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 + x.$$

Conclusion, l'ensemble solution est la droite d'équation $y = 1 + x$ privée du point $(-1, 0)$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 1 + x\} \setminus \{-1\}.}$$



5. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Montrons que $\overline{f(z)} = if(z)$. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$\overline{f(z)} = \overline{\left(\frac{z-i}{z+1}\right)} = \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}+1}.$$

Or $z \in \mathbb{U}$ donc $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Ainsi,

$$\overline{f(z)} = \frac{\frac{1}{z}+i}{\frac{1}{z}+1} = \frac{1+iz}{1+z} = i\frac{z-i}{z+1} = if(z).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}, \quad \overline{f(z)} = if(z).}$$

6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tel que $\overline{f(z)} = if(z)$. Montrons que $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
\overline{f(z)} = if(z) \quad &\Rightarrow \quad \overline{\left(\frac{z-i}{z+1}\right)} = i\frac{z-i}{z+1} \\
&\Rightarrow \quad \frac{\overline{z}+i}{\overline{z}+1} = \frac{iz+1}{z+1} \\
&\Rightarrow \quad (\overline{z}+i)(z+1) = (iz+1)(\overline{z}+1) \\
&\Rightarrow \quad |z|^2 + \overline{z} + iz + i = i|z|^2 + iz + \overline{z} + 1 \\
&\Rightarrow \quad |z|^2(1-i) = 1-i \\
&\Rightarrow \quad |z|^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad |z| = 1 \\
&\Rightarrow \quad z \in \mathbb{U}.
\end{aligned}$$

Or $z \neq -1$. Conclusion,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \quad \left(\overline{f(z)} = if(z)\right) \quad \Rightarrow \quad z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}.$$

NB : on aurait pu aussi raisonner par équivalences pour avoir la réciproque et retrouver le résultat de la question précédente.

7. Calculons $f(\mathbb{U} \setminus \{-1\})$ et donnons la représentation graphique de cet ensemble. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a

$$\omega \in f(\mathbb{U} \setminus \{-1\}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}, \ \omega = f(z).$$

Or par les deux questions précédentes, on a $\left(\overline{f(z)} = if(z)\right) \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Ainsi,

$$\omega \in f(\mathbb{U} \setminus \{-1\}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \ \begin{cases} \overline{f(z)} = if(z) \\ \omega = f(z) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\omega} = i\omega.$$

Posons $\omega = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient,

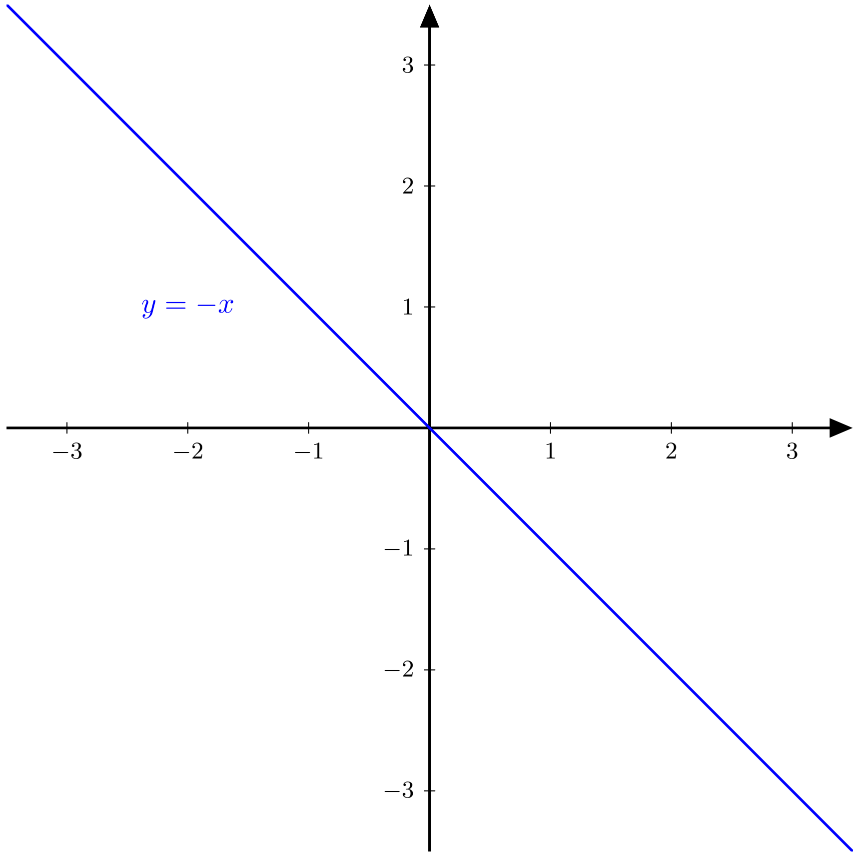
$$\omega \in f(\mathbb{U} \setminus \{-1\}) \quad \Leftrightarrow \quad x - iy = i(x+iy) = ix - y.$$

Par unicité de la forme algébrique :

$$\omega \in f(\mathbb{U} \setminus \{-1\}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -y \\ -y = x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = -x.$$

Conclusion, on obtient la droite d'équation $y = -x$:

$$\boxed{f(\mathbb{U} \setminus \{-1\}) = \{\omega = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = -x\}.}$$



8. Calculons $A = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mathrm{e}^{i\,\theta} \neq -1 \right\}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{e}^{i\,\theta} = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{i\,\theta} = \mathrm{e}^{i\pi} \qquad \Leftrightarrow \qquad \theta \equiv \pi \ [2\pi]\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{A = \{\, (2k+1)\,\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\}\,.}$$

9. Soit $\theta \in \left]-\pi;\pi\right[$.

(a) Montrons que $f\left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\right) = i\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+1\right)$. Puisque $\theta \in \left]-\pi;\pi\right[$, alors $\theta \in A$ et donc $\mathrm{e}^{i\,\theta} \neq -1$ autrement dit $\mathrm{e}^{i\,\theta} \in \mathbb{C}\setminus\{-1\} = \mathcal{D}$. Donc $f\left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\right)$ existe. De plus, on a les égalités entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned}
f\left(e^{i\theta}\right) &= \frac{e^{i\theta} - i}{e^{i\theta} + 1} \\
&= \frac{e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\theta} + e^{i0}} \\
&= \frac{e^{i\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{i\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\
&= e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{2i\sin\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= i\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= i\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= i\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= i\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(e^{i\theta}\right) = i\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right).}$$

(b) Déterminons un argument de $f\left(e^{i\theta}\right)$. Par la question précédente,

$$f\left(e^{i\theta}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Puisque $\theta \in \left]-\pi;\pi\right[$, alors $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et donc on observe que $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ existe bien. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{car } \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi.
\end{aligned}$$

De même, $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 < 0 \ \Leftrightarrow\ -\pi < \theta < \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$f\left(e^{i\theta}\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) e^{i\frac{3\pi}{4}} & \text{si } \theta \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\\ 0 & \text{si } \theta = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right| e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right)} & \text{si } \theta \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\arg\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right) \equiv \begin{cases} \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] & \text{si } \theta \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\\ -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] & \text{si } \theta \in \left]-\pi;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}}$$

et

$$\boxed{f\left(e^{i\theta}\right) = 0 \text{ si } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ (et n'a donc par d'argument).}}$$

(c) Par la question précédente, on observe que pour $\theta \in \left]-\pi;\pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, on a $\arg\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [\pi]$. Par conséquent le point d'affixe $f\left(e^{i\theta}\right)$ est sur la droite d'équation $y=-x$. Or $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ et même $e^{i\theta} \in \mathbb{U}\setminus\{-1\}$ car $\theta \in A$ donc $f\left(e^{i\theta}\right) \in f\left(\mathbb{U}\setminus\{-1\}\right)$ qui est bien l'ensemble des affixes de la droite d'équation $y=-x$ d'après la question 7. Ce résultat reste vrai si $\theta = \frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{le résultat de la question précédente est parfaitement cohérent avec la question 7.}}$$

10. Montrons que f définit une bijection de $\mathcal{D}$ dans un ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ et déterminons f^{-1}. Soient $z \in \mathcal{D} = \mathbb{C}\setminus\{-1\}$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z)=\omega \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z-i}{z+1}=\omega \\ &\Leftrightarrow \quad z-i=\omega\,(z+1) \qquad \text{car } z\neq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad z\,(1-\omega)=\omega+i. \end{aligned}$$

Si $\omega=1$, alors on a $f(z)=\omega \Leftrightarrow 0=1+i$ ce qui est impossible. Dans ce cas, l'équation $f(z)=\omega$ n'a pas de solution et donc 1 n'a pas d'antécédent par f. Supposons maintenant que $\omega\neq 1$. Alors,

$$f(z)=\omega \qquad \Leftrightarrow \qquad z=\frac{\omega+i}{1-\omega}.$$

Dans ce cas, $f(z)=\omega$ admet une et une seule solution. Conclusion,

$$\boxed{f: \begin{array}{rcl} \mathbb{C}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{C}\setminus\{1\} \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+1} \end{array} \text{ est bijective et } f^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{C}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{C}\setminus\{-1\} \\ \omega & \mapsto & \frac{\omega+i}{1-\omega}. \end{array}}$$

Problème III - Calcul algébrique

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha} 2^{a_k},$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 1 : Cours

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$. Alors, on obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha} 2^0 = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha}.$$

Si $\alpha = 0$, alors on obtient la somme d'une constante,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^0 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1.$$

De même, si $\alpha = 1$, on obtient la somme des premiers entiers :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si $\alpha = 2$, on obtient la somme des carrés des premiers entiers :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{si } \alpha = 2. \end{cases}}$$

2. On suppose que $\alpha = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. Par définition, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^0 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$. Donc

$$S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = 2^{n+1} - 1.}$$

Partie 2 : Cas où $\alpha = 1$

On suppose que $\alpha = 1$ et on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$. On propose ni une ni deux ni trois mais quatre méthodes pour calculer S_n !

3. On a par définition,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k.$$

Donc

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} k2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 = 2 \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{2} k2^k = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 = 2 + 8 = 10.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_1 = 2 \text{ et } S_2 = 10.}$$

4. *(Par un changement d'indice)*

(a) Par définition, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k + 0 \times 2^0 = \sum_{k=1}^{n} k2^k \qquad \text{car } n \geqslant 1.$$

Posons $\tilde{k} = k - 1$ i.e. $k = \tilde{k} + 1$. Alors,

$$S_n = \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \left(\tilde{k} + 1\right) 2^{\tilde{k}+1}.$$

L'indice de sommation étant muet, on conclut

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) 2^{k+1}.}$$

(b) Par la question précédente, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} k2^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k2^{k+1} - n2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} k2^{k} - n2^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} \\ &= 2S_n - n2^{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k}. \end{aligned}$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $2 \neq 1$,

$$S_n = 2S_n - n2^{n+1} + 2\frac{2^{n-1+1} - 1}{2-1} = 2S_n - n2^{n+1} + 2\left(2^n - 1\right).$$

Dès lors, on en déduit que

$$S_n = n2^{n+1} - 2\left(2^n - 1\right) = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)\, 2^{n+1} + 2.$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = (n-1)\, 2^{n+1} + 2.}$$

On vérifie son résultat. Si $n = 1$, on a $S_1 = (1-1)\, 2^{1+1} + 2 = 2$ ce qui est cohérent avec la question 3. De même, $S_2 = (2-1)\, 2^{2+1} + 2 = 8 + 2 = 10$ OK !

5. *(Par une dérivée)* Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \end{array}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on reconnaît une somme géométrique. Donc

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Cette expression est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - \left(1 - x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

En particulier, pour $x = 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} &= \frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(1-2)^2} \\
&= n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 \\
&= 2^n(2n - n - 1) + 1 \\
&= 2^n(n-1) + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k = 0 + \sum_{k=1}^{n} k2^k = 2\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 2\left[2^n(n-1) + 1\right] = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Conclusion, on retrouve bien l'expression de la question 4.b

$$\boxed{S_n = 2^{n+1}(n-1) + 2.}$$

6. *(Par une autre méthode dont je ne donnerai pas le nom...)*

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

   $$(k+1)2^{k+1} - k2^k = (2k+2)2^k - k2^k = (2k+2-k)2^k = (k+2)2^k = k2^k + 2^{k+1}.$$

   Conclusion, on trouve bien que

   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (k+1)2^{k+1} - k2^k = k2^k + 2^{k+1}.}$$

(b) En sommant la relation précédente entre 0 et n, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\,2^{k+1}-k2^{k}\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[k2^{k}+2^{k+1}\right]$$

On reconnaît une somme télescopique dans le terme de gauche donc

$$\begin{aligned} & (n+1)\,2^{n+1}-0\times 2^{0}=\sum_{k=0}^{n}\left[k2^{k}+2^{k+1}\right] \\ \Leftrightarrow\quad & (n+1)\,2^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}k2^{k}+\sum_{k=0}^{n}2^{k+1} \\ \Leftrightarrow\quad & (n+1)\,2^{n+1}=S_n+2\sum_{k=0}^{n}2^{k}. \end{aligned}$$

En reconnaissant une somme géométrique de raison $2\neq 1$, on obtient que

$$\begin{aligned} S_n &= (n+1)\,2^{n+1}-2\sum_{k=0}^{n}2^{k} \\ &= (n+1)\,2^{n+1}-2\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1} \\ &= (n+1)\,2^{n+1}-2\left(2^{n+1}-1\right) \\ &= (n+1)\,2^{n+1}-2^{n+2}+2 \\ &= (n+1-2)\,2^{n+1}+2 \\ &= (n-1)\,2^{n+1}+2. \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve une fois encore,

$$\boxed{S_n=(n-1)\,2^{n+1}+2.}$$

7. *(Par une somme double)*

(a) En sommant en interne sur p et en externe sur k, on a

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n}2^{k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}2^{k}.$$

L'entier 2^k ne dépendant pas de p :

$$\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n}2^{k}=\sum_{k=1}^{n}2^{k}\sum_{p=1}^{k}1=\sum_{k=1}^{n}2^{k}\times k=S_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n}2^{k}=S_n.}$$

(b) En échangeant l'ordre de sommation i.e. en sommant en interne sur k et en externe sur p, on a

$$S_n=\sum_{1\leqslant p\leqslant k\leqslant n}2^{k}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n}2^{k}.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison $q = 2 \neq 1$. On a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{p=1}^{n} 2^p \frac{2^{n-p+1}-1}{2-1} \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left(2^{n+1} - 2^p\right) \\ &= n2^{n+1} - 2\frac{2^n-1}{2-1} \\ &= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \\ &= (n-1)\,2^{n+1} + 2. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient une fois encore,

$$\boxed{S_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2.}$$

(c) On procède comme dans la question précédente, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k &= \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=p+1}^{n} \binom{n}{p} 2^k \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} \sum_{k=p+1}^{n} 2^k \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} 2^{p+1} \frac{2^{n-p-1+1}-1}{2-1} \\ &= \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} \left(2^{n+1} - 2^{p+1}\right) \\ &= 2^{n+1} \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} - \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} 2^{p+1} \\ &= 2^{n+1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} - 2^{n+1} - 2^{n+1} - \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{p+1} + 2 + 2^{n+1}. \end{aligned}$$

On reconnaît alors deux binômes de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k &= 2^{n+1}(1+1)^n - 2^{n+1} - 2(2+1)^n + 2 \\ &= 2^{2n+1} - 2^{n+1} - 2\times 3^n + 2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{1\leqslant p<k\leqslant n} \binom{n}{p} 2^k = 2^{n+1}\left(2^n - 1\right) - 2\times 3^n + 2.}$$

8. *(Une conséquence)* Par l'inversion d'indice $\tilde{k} = n - k$, on obtient que

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \frac{n-k}{2^{n-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{2^{n-k}} - \frac{k}{2^{n-k}} && \text{car l'indice est muet} \\
&= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^k - \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} k 2^k \\
&= \frac{n}{2^n} \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - \frac{1}{2^n} S_n && \text{car on reconnaît une somme géométrique} \\
&= n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n}\left((n-1)\,2^{n+1} + 2\right) && \text{par ce qui précède} \\
&= 2n - \frac{n}{2^n} - 2\,(n-1) - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.}$$

Problème IV - Trigonométrie

Partie 1 : Manipulation d'une expression trigonométrique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \cos^2(x)\left(\cos(2x) - 1\right) + \sin^2(x).$$

1. Calculons $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. On a
$$f(0) = 1^2\left(1-1\right) + 0^2 = 0.$$
Puis,
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} = 0.$$
Aussi,
$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = -\frac{1}{8}.$$
Enfin,
$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{3}{4} = -\frac{3}{8} + \frac{6}{8} = \frac{3}{8}.$$
Conclusion,
$$\boxed{f(0) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{8}, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{8}.}$$

2. *Signe de $f(x)$, méthode 1.*

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Précisons $\cos(2x)$ uniquement en fonction de $\cos(x)$. On a directement,
$$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.}$$

   (b) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$, par la question précédente, on a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2(x)\left(\cos(2x) - 1\right) + \sin^2(x) \\ &= \cos^2(x)\left(2\cos^2(x) - 1 - 1\right) + \sin^2(x) \\ &= 2\cos^4(x) - 2\cos^2(x) + 1 - \cos^2(x) \\ &= 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1. \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1.}$$

   (c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \cos(x)$. Par la question précédente,
$$f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^4(x) - 3\cos^2(x) + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2X^4 - 3X^2 + 1 < 0.$$
   Posons $Y = X^2$. Alors,
$$f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2Y^2 - 3Y + 1 < 0.$$

Puisque 1 est une racine,

$$f(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad (Y-1)(2Y-1)<0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(Y-1)\left(Y-\frac{1}{2}\right)<0.$$

Donc les deux racines sont 1 et $\frac{1}{2}$. Donc le signe de 2 est à l'extérieur des racines d'où

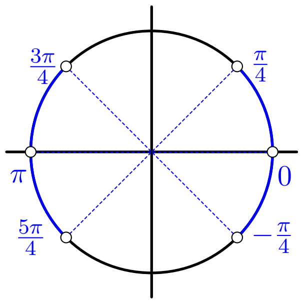
$$\begin{aligned}
f(x)<0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}<Y<1\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}<X^2<1\\
&\Leftrightarrow \quad -1<X<-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ OU } \frac{1}{\sqrt{2}}<X<1\\
&\Leftrightarrow \quad -1<\cos(x)<-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ OU } \frac{\sqrt{2}}{2}<\cos(x)<1\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{3\pi}{4}+2k\pi<x<(2k+1)\pi \text{ OU } (2k+1)\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi\\
&\qquad\qquad \text{OU } -\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<2k\pi \text{ OU } 2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi.
\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$f(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{4}+k\pi<x<k\pi \text{ OU } k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi;k\pi\right[\cup\left]k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right[\right).}$$



3. *Signe de $f(x)$, méthode 2.*

(a) Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-\cos(2x)\sin^2(x)$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Par la formule $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$, on a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x)&=\cos^2(x)(\cos(2x)-1)+\sin^2(x)\\
&=\cos^2(x)\left(-2\sin\left(\frac{2x+0}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-0}{2}\right)\right)+\sin^2(x)\\
&=-2\cos^2(x)\sin(x)^2+\sin^2(x)\\
&=-\sin^2(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)\\
&=-\sin^2(x)\cos(2x) \qquad \text{d'après la question 2.a}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=-\cos(2x)\sin^2(x).}$$

(b) Retrouvons le résultat de la question 2.c Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
f(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\cos(2x)\sin^2(x) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x)\sin^2(x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin(x) \neq 0 \\ \cos(2x) > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \not\equiv 0 \ [\pi] \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \not\equiv 0 \ [\pi] \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < k\pi \ \text{ OU } \ k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 2.c

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left]-\frac{\pi}{4} + k\pi; k\pi\right[\cup \left]k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right[\right).}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéarisons l'expression de $f(x)$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos^2(x)(\cos(2x) - 1) + \sin^2(x) \\
&= \frac{1+\cos(2x)}{2}(\cos(2x) - 1) + \frac{1-\cos(2x)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos^2(2x) - 1 + 1 - \cos(2x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos(4x)}{2} - \cos(2x)\right) \\
&= \frac{\cos(4x) - 2\cos(2x) + 1}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\cos(4x) - 2\cos(2x) + 1}{4}.}$$

Partie 2 : Inégalité de Winkler

On pose :

$$g : \quad x \mapsto \sin^2(x) + x\tan(x) - 2x^2.$$

5. Précisons $\mathcal{D}_g$ le domaine de définition de g et vérifions que $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathcal{D}_g$. La fonction sinus et la fonction carrée sont définies sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donc par somme, on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

En particulier, on a directement

$$\boxed{\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathcal{D}_g.}$$

6. Calculons la dérivée de g sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction g est dérivable sur son domaine de définition comme somme de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition respectifs. Donc g est dérivable en particulier sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2\cos(x)\sin(x) + \tan(x) + x\left(1 + \tan^2(x)\right) - 4x \\
&= \sin(2x) + \tan(x) + x\left(1 + \tan^2(x)\right) - 4x.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g'(x) = \sin(2x) + \tan(x) + x\left(1+\tan^2(x)\right) - 4x.}$$

7. Montrons que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) = 2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x)$. La fonction g' est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ comme somme de fonctions qui le sont donc g est deux fois dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et par la question précédente, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{aligned}
g''(x) &= 2\cos(2x) + 1 + \tan^2(x) + 1 + \tan^2(x) + x\left(2\left(1+\tan^2(x)\right)\tan(x)\right) - 4\\
&= 2\cos(2x) + \left(1+\tan^2(x)\right)(2 + 2x\tan(x)) - 4\\
&= 2\cos(2x) + 2 + 2x\tan(x) + 2\tan^2(x) + 2x\tan^3(x) - 4\\
&= 2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 + 2x\tan(x) + 2x\tan^3(x)\\
&= 2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) = 2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x).}$$

8. Montrons que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) = \frac{2f(x)}{\cos^2(x)} + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x)$. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{2f(x)}{\cos^2(x)} + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) &= \frac{2\left(\cos^2(x)(\cos(2x)-1) + \sin^2(x)\right)}{\cos^2(x)} + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x)\\
&= 2(\cos(2x)-1) + \tan^2(x) + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x)\\
&= 2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) = \frac{2f(x)}{\cos^2(x)} + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x).}$$

9. A l'aide de la question 3.a montrons que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{4}\sin(4x)\tan(x)$. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Par la question 3.a on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\cos(2x)\sin^2(x)\\
&= -\cos(2x)\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{\cos(x)}\\
&= -\cos(2x)\tan(x)\sin(x)\cos(x)\\
&= -\cos(2x)\tan(x)\frac{\sin(2x)}{2}\\
&= -\frac{1}{2}\tan(x)\sin(2x)\cos(2x)\\
&= -\frac{1}{2}\tan(x)\frac{\sin(4x)}{2}\\
&= -\frac{1}{4}\tan(x)\sin(4x).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = -\frac{1}{4}\sin(4x)\tan(x).}$$

10. Montrons que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x)\right)\tan(x)\left(4x - \sin(4x)\right).$ Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Par la question 8. et la question précédente,

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{2f(x)}{\cos^2(x)} + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\sin(4x)\tan(x)}{\cos^2(x)} + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \\ &= -\frac{1}{2}\sin(4x)\tan(x)\left(1+\tan^2(x)\right) + 2\left(1+\tan^2(x)\right)x\tan(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x)\right)\tan(x)\left(-\sin(4x)+4x\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x)\right)\tan(x)\left(4x-\sin(4x)\right).}$$

11. On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\sin(t) \leqslant t$. Montrons que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) > 0$. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. En prenant $t = 4x > 0$, on a $\sin(4x) < 4x$. Donc $4x - \sin(4x) > 0$. De plus $\tan(x) > 0$ et $1 + \tan^2(x) > 1 > 0$. Donc par la question précédente,

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g''(x) > 0.$$

Donc la fonction g' est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Or g' est définie et même continue en 0 (par la question 6.) donc g' est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g'(x) > g'(0) = 0.$$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Or g est définie et même continue en 0. Donc g est strictement croissance sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g(x) > g(0) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad g(x) > 0.}$$

12. Concluons en démontrant l'inégalité de Winkler : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} > 2$. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + x\tan(x) - 2x^2 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin^2(x) + x\tan(x) > 2x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2(x)}{x^2} + \frac{\tan(x)}{x} > 2 \qquad \text{car } x^2 > 0. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien l'inégalité de Winkler :

$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \frac{\tan(x)}{x} > 2.}$$